Е.А. Бурлакова
С.В. Колпакова
А.А. Копанева

МАТЕМАТИКА. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ЧАСТЬ 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНПК УНИВЕРСИТЕТ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ - УЧЕБНО-НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ КОМПЛЕКС»

Е.А. Бурлакова, С.В. Колпакова, А.А. Копанева

МАТЕМАТИКА.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ЧАСТЬ 2.
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Рекомендовано ФГБОУ ВПО «Госуниверситет - УНПК»
для использования в учебном процессе в качестве учебного пособия
для высшего профессионального образования

Орел 2011

УДК 519.2 (075)
ББК 22.171Я 7
Б91

Рецензенты:

кандидат технических наук, доцент кафедры «Высшая математика»
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Государственный университет - учебно-научно-
производственный коплекс»
Е.Н. Корнеева,

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математика»
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Орловский государственный аграрный университет»
А.М. Моисеенко

Бурлакова, Е.А.

Б91 Математика. Теория вероятностей. В 2 ч. Ч. 2. Случайные величины: учебное пособие для высшего профессионального образования / Е.А. Бурлакова, С.В. Колпакова, А.А. Копанева. – Орел: ФГБОУ ВПО «Госуниверситет - УНПК», 2011. – 69 с.

ISBN 978-5-93932-420-5

Учебное пособие содержит весь материал по разделу учебной программы «Теория вероятностей», относящийся к случайным величинам. Рассмотрены основные распределения для дискретных и непрерывных случайных величин.

Предназначено для самостоятельной работы студентов технических специальностей, изучающих дисциплину «Высшая математика» и может быть использовано преподавателями при проведении практических занятий.

УДК 519.2 (075)
ББК 22.171Я7

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Случайная величина – одно из фундаментальных понятий в теории вероятностей. Оно тесно связано со случайными событиями, являясь в некотором смысле их обобщением. Для случайной величины также первичным служит испытание, но результат теперь характеризуется не альтернативным исходом (появляется событие или нет), а некоторым числом. Например, число m появлений события в n повторных независимых испытаниях; число очков, выбиваемых стрелком; размер вклада на случайно выбранном в сберкассе счете и т.д. Случайная величина, как и случайное событие, подлежит четкому определению по условию задачи. Связь со случайным событием заключается в том, что принятие случайной величиною некоторого числового значения, то есть выполнение равенства $X=x_i$, есть случайное событие, характеризуемое вероятностью $P(X=x_i)=p_i$.

В данном пособии рассматриваются дискретные случайные величины, обладающие конечным или счетным множеством возможных значений x_i и соответствующими им вероятностями, и непрерывные случайные величины, являющиеся непосредственным обобщением понятия дискретной случайной величины. А также способы задания случайных величин (ряд распределения, закон распределения, функция плотности распределения вероятностей); числовые характеристики случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, мода, медиана); различные виды распределений (биномиальное, распределение Пуассона, геометрическое и гипергеометрическое, равномерное, нормальное, показательное распределения).

1. ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Приведем замечательные слова А.Н. Колмагорова: «П.Л. Чебышёв впервые ясно оценил и использовал силу понятий «случайной величины» и «математического ожидания»… Понятия эти … являются производными от основных понятий «события» и «вероятности». Но случайные величины и их математические ожидания подчинены гораздо более удобному и гибкому алгоритму» [13].

Большое значение для развития артиллерийской науки имели работы П.Л. Чебышева по теории вероятностей. Особое значение для становления теории стрельбы имел мемуар «О средних величинах». Благодаря ему русские артиллеристы уже в конце 60-х годов XIX в. получили возможность научно решать такой важный вопрос в артиллерийской науке, как оценка эффективности стрельбы [15]. Ранее этот вопрос решался чисто эмпирически. Стрельбу необходимо вести по правилам, основанным на выводах теории вероятностей. И это понятно, так как при стрельбе приходится сталкиваться с целым рядом случайных величин: рассеиванием снарядов и разрывов, ошибками тех измерений, которые были допущены при планировании и осуществлении выстрела и многих других.

Случайной величиной называют переменную величину, которая в результате испытания принимает то или иное значение, причем заранее неизвестное.

Случайные величины обозначаются прописными латинскими буквами X, Y, Z,… (или строчными греческими буквами ξ (кси), η (эта), θ (тэта), ψ (пси) и т.д.), принимаемые ими значения соответственно малыми буквами $x_1, x_2, x_3,..., y_1, y_2, y_3,...$.

Примерами случайных величин могут служить: 1) X – число очков, появляющихся при бросании игральной кости; 2) Y – число выстрелов до первого попадания в цель; 3) Z – рост человека и т.п. (время безотказной работы прибора, температура воздуха, прибыль фирмы и т.д.).

Для полного описания случайной величины недостаточно лишь знания ее возможных значений, необходимо еще знать вероятности этих значений.

Любое правило (таблица, функция, график), позволяющее находить вероятности отдельных значений случайной величины или множества этих значений, называется ***законом распределения случайной величины*** (или распределением). Про случайную величину говорят, что «она подчинена данному закону распределения».

Случайные величины могут быть дискретными и непрерывными.

Дискретной (д. с. в.) называют случайную величину, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, принимаемые этой величиной с определенными вероятностями. Например, количество очков, выпавших при бросании игральной кости $\{1; 2; 3; \ldots; 6\}$.

Непрерывной (н. с. в.) называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого промежутка. В качестве примеров можно привести время, проведённое на остановке в ожидании автобуса, расстояние на которое прыгает спортсмен на соревнованиях по прыжкам в длину, время безотказной работы прибора, свой собственный вес, измеренный после лечебной диеты, угол между стрелками часов $\{0; \pi\}$ и т.д.

2. ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности.

Законом распределения д. с. в. называется соответствие между возможными значениями $x_1, x_2, x_3,...$ этой случайной величины и соответствующими им вероятностями $p_1, p_2, p_3,...$.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан таблично или аналитически, то есть с помощью формул $p_i = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, 3,...$, определяющих вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение x_i. Если д. с. в. X принимает конечное множество значений $x_1, x_2, x_3,..., x_n$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, p_3,..., p_n$, то закон распределения можно задать в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Так как события $x_1, x_2, x_3,..., x_n$ образуют полную группу, то сумма вероятностей равна единице, то есть

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины изображают графически, для чего в прямоугольной декартовой системе координат строят точки (x_i, p_i) и соединяют их последовательно отрезками прямых. Полученная при этом линия называется *многоугольником распределения* случайной величины X (рис. 1).

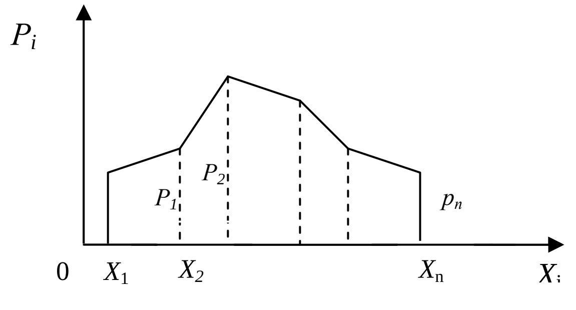

Рис. 1. Многоугольник распределения

Теперь можно дать более точное определение д. с. в.

Случайная величина X *дискретна*, если существует конечное или счетное множество чисел $x_1, x_2, x_3,\ldots$ таких, что

$$P\{X = x_i\} = p_i > 0 \ (i = 1,2,3,\ldots) \text{ и } p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = 1.$$

Общая схема решения задач на построение законов распределения будет следующей:

1) введение и четкое описание случайной величины, о которой идет речь в задаче;

2) описание множества ее возможных значений $x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n$;

3) рассмотрение выполнения каждого из равенств $X = x_i$ как случайного события;

4) вычисление вероятностей этих событий с помощью основных теорем и формул;

5) проверка правильности составленного распределения с помощью равенства $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Определим математические операции над дискретными случайными величинами.

Суммой (разностью, произведением) д. с. в. X, принимающей значения x_i с вероятностью

$$p_i = P\{X = x_i\},\ i = 1,2,\ldots,n$$

и д. с. в. Y, принимающей значения y_j с вероятностями

$$p_j = P\{Y = y_j\},\ \ j = 1,2,\ldots,m$$

называется д. с. в.

$$Z=X+Y\ (Z=X-Y,\ Z=X\cdot Y),$$

которая принимает значения $z_{ij} = x_i + y_j$ $(z_{ij} = x_i - y_j, z_{ij} = x_i \cdot y_j)$ с вероятностями $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ для всех указанных значений i и j. В случае совпадения некоторых сумм $x_i + y_j$ (разностей $x_i - y_j$, произведений $x_i \cdot y_j$) соответствующие вероятности складываются.

Произведение д. с. в. *на число* λ называется д. с. в. λX, принимающая значения λx_i с вероятностями $p_i = P\{X = x_i\}$.

Две д. с. в. X и Y называются *независимыми*, если события $\{X = x_i\} = A_i$ и $\{Y = y_j\} = B_j$ независимы для любых $i = 1,2,\ldots,n,\ \ j = 1,2,\ldots,m$, то есть

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}.$$

В противном случае случайные величины называются *зависимыми*.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся распределения дискретных случайных величин.

Биномиальное распределение. Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p. Найдем закон распределения случайной величины X – числа появлений события A. Очевидно, что в этих n испытаниях событие A может появиться 0, 1, 2,…, n–1, n раз. Вероятности этих значений находим по формуле Бернулли:

$$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

$$P_n(0) = C_n^0 p^0 q^{n-0} = q^n,$$

$$P_n(1) = C_n^1 p^1 q^{n-1} = n \cdot p \cdot q^{n-1},$$

$$P_n(n-1) = C_n^{n-1} p^{n-1} q^{n-(n-1)} = n \cdot p^{n-1} \cdot q,$$

$$P_n(n) = C_n^n p^n q^0 = p^n.$$

x_i	0	1	…	*n-1*	n
p_i	q^n	$n \cdot p \cdot q^{n-1}$	…	$n \cdot p^{n-1} \cdot q$	p^n

Пример.

Монета брошена два раза. Составить закон распределения случайной величины X – числа выпадений «герба».

Решение. Вероятность появления «герба» $p = 0{,}5$, $q = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$. При двух бросаниях монеты «герб» может появиться 0, 1 и 2 раза, то есть $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Вероятности этих значений равны:

$$p_1 = P_2(0) = C_2^0 p^0 q^{2-0} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25,$$

$$p_2 = P_2(1) = C_2^1 p^1 q^{2-1} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

$$p_3 = P_2(2) = C_2^2 p^2 q^{2-2} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0{,}25.$$

Искомый закон примет вид:

x_i	0	1	2
p_i	0,25	0,5	0,25

(Контроль: $\sum\limits_{i=0}^{2} p_i = 0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}25 = 1$.)

Распределение Пуассона. Если вероятность p наступления события A в n испытаниях постоянна и мала ($p < 0{,}1$), а число испытаний достаточно велико ($n > 10$), то вероятность того, что при n независимых испытаниях событие A наступит ровно m раз находится по формуле Пуассона:

$$P_n(X = m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \text{ где } \lambda = np.$$

Распределение Пуассона является предельным для биномиального, если число опытов n устремляется к бесконечности, а вероятность события p стремится к 0, причем их произведение остается постоянным. С этим связано еще одно название распределения Пуассона – *закон редких событий*.

Пример.

Торговая база получила 1000 электролампочек. Вероятность повреждения электролампочки в пути 0,001. Составьте закон распределения поврежденных электролампочек, указав первые пять значений этой случайной величины. Определите вероятность того, что в пути было повреждено четыре электролампочки.

Решение. Пусть случайная величина X – количество поврежденных электролампочек. Данная с. в. может принимать множество значений $x_1 = 0, x_2 = 1, ..., x_{1001} = 1000$. Отсюда $p = 0{,}001$ следовательно, имеем дело с редкими событиями и $n = 1000$ – достаточно велико, поэтому для решения задачи используем формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \text{ где } \lambda = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1.$$

Тогда вероятности значений с. в. будут равны:

$$p_1 = P_{1000}(0) \approx \frac{1^0 \cdot e^{-1}}{0!} = 0{,}3679,$$

$$p_2 = P_{1000}(1) \approx \frac{1^1 \cdot e^{-1}}{1!} = 0{,}3679,$$

$$p_3 = P_{1000}(2) \approx \frac{1^2 \cdot e^{-1}}{2!} = 0{,}1839,$$

$$p_4 = P_{1000}(3) \approx \frac{1^3 \cdot e^{-1}}{3!} = 0{,}0613,$$

$$p_5 = P_{1000}(4) \approx \frac{1^4 \cdot e^{-1}}{4!} = 0{,}0153.$$

Искомое распределение примет вид:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153

Проверку сделать в данном примере достаточно сложно, так как случайная величина имеет большое количество значений.

Вероятность того, что в пути было повреждено четыре лампочки, будет равна:

$$P_{1000}(4) \approx \frac{1^4 \cdot e^{-1}}{4!} = 0{,}0153.$$

Геометрическое распределение. Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, следовательно, вероятность его непоявления $q = 1 - p$. Испытания заканчиваются, как только появляется событие A.

Пусть в первых $n-1$ испытаниях событие A не появилось, а в n-ом испытании появилось. Тогда $P(X = n) = q^{n-1} \cdot p$. Полагая, $n = 0, 1, 2, ...$ получим геометрическую прогрессию:

$$p,\ qp, q^2 p, ..., q^{n-1} p, ...$$

Случайную величину, распределенную по геометрическому закону, можно интерпретировать как число n опытов (испытаний), проведенных по схеме Бернулли до первого положительного исхода.

Пример.

Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания равна 0,6. Составьте закон распределения числа производимых выстрелов, если имеется четыре патрона.

Решение. С. в. X – число производимых выстрелов: $x_1 = 0,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 3,\ x_4 = 4$. Найдем вероятности каждого из значений.

Если был один выстрел, то сразу было попадание, тогда:

$$p_1 = P(X = 1) = 0{,}6.$$

Если выстрелов было два, то при первом выстреле был промах, а при втором попадание, тогда:

$$p_2 = P(X = 2) = (1 - 0{,}6) \cdot 0{,}6 = 0{,}24.$$

Аналогично находится p_3:

$$p_3 = P(X = 3) = (1 - 0{,}6) \cdot (1 - 0{,}6) \cdot 0{,}6 = 0{,}096.$$

Если было четыре выстрела, то возможны два случая: при первых трех выстрелах были промахи, а четвертое попадание или все четыре – промаха.

$$p_4 = P(X = 4) = (1 - 0{,}6) \cdot (1 - 0{,}6) \cdot (1 - 0{,}6) \cdot 0{,}6 + (1 - 0{,}6) \cdot (1 - 0{,}6) \times$$
$$\times (1 - 0{,}6) \cdot (1 - 0{,}6) = 0{,}0256 + 0{,}0384 = 0{,}064.$$

Искомое распределение примет вид:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,6	0,24	0,096	0,064

(Контроль: $\sum\limits_{i=1}^{4} p_i = 0{,}6 + 0{,}24 + 0{,}096 + 0{,}064 = 1.$)

Гипергеометрическое распределение. Рассмотрим задачу. Пусть в партии из N изделий имеется M стандартных ($M<N$). Отбирают n изделий. Обозначим через с. в. X – число m стандартных изделий среди n отобранных.

Итак, искомую вероятность найдем как отношение благоприятствующих исходов к общему числу исходов. Число благоприятствующих исходов $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$. Общее число исходов C_N^n. Итак, искомая вероятность равна: $P(X=m)=\dfrac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$. Эта формула определяет гипергеометрическое распределение.

Данное распределение определяется тремя параметрами N, M, n. Если n мало по сравнению с N (практически при $n<\dfrac{1}{10}N$), он приближается к биномиальному распределению с параметрами n и $p=\dfrac{M}{N}$.

Пример.

Среди 50 изделий 20 окрашенных. Наугад отобрали три изделия. Постройте ряд распределения числа окрашенных изделий, содержащихся в указанной выборке.

Решение. Случайная величина X – число окрашенных деталей среди отобранных. Она может принимать следующие значения: $x_0=0,\ x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$. Соответствующие им значения p_i найдем, исходя из классического определения вероятности:

$$p_0=P(X=0)=\frac{C_{20}^0 \cdot C_{30}^3}{C_{50}^3}=0{,}216,$$

$$p_1=P(X=1)=\frac{C_{20}^1 \cdot C_{30}^2}{C_{50}^3}=0{,}444,$$

$$p_2=P(X=2)=\frac{C_{20}^2 \cdot C_{30}^1}{C_{50}^3}=0{,}291,$$

$$p_3=P(X=3)=\frac{C_{20}^3 \cdot C_{30}^0}{C_{50}^3}=0{,}058.$$

Отсюда ряд распределения с. в. X имеет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,444	0,291	0,058

(Контроль: $\sum\limits_{i=0}^{3} p_i=0{,}216+0{,}444+0{,}291+0{,}058=1$.)

Примеры:

1. Монету бросают 5 раз. Составьте закон распределения количества выпавших гербов.

Решение. Случайная величина X – число выпадений герба. При однократном бросании монеты вероятность выпадения герба p равна $\frac{1}{2}$, то есть $p=\frac{1}{2}$, $q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

При пятикратном бросании монеты герб может выпасть 0, 1, 2, 3, 4 и 5 раз, следовательно, случайная величина X принимает следующие значения: $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$. Найдем вероятности этих значений, используя формулу Бернулли:

$$p_0=P_5(0)=C_5^0p^0q^{5-0}=1\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32};$$

$$p_1=P_5(1)=C_5^1p^1q^{5-1}=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{32};$$

$$p_2=P_5(2)=C_5^2p^2q^{5-2}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{10}{32};$$

$$p_3=P_5(3)=C_5^3p^3q^{5-3}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32};$$

$$p_4=P_5(4)=C_5^4p^4q^{5-4}=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{32};$$

$$p_5=P_5(5)=C_5^5p^5q^{5-5}=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{32}.$$

Закон распределения имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

(Контроль: $\sum\limits_{i=0}^{5}p_i=1$.)

2. Вероятности того, что студент сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам A и $Б$ равны соответственно 0,7 и 0,9. Составьте закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент. Постройте многоугольник распределения.

Решение. Пусть A: {событие, состоящее в том, что студент сдаст экзамен по дисциплине A}; B: {событие, состоящее в том, что студент сдаст экзамен по дисциплине $Б$}. Случайная величина X – число экзаменов, которые сдал студент. Она может принимать следующие значения: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$. Соответствующие им значения p_i найдем, исходя из теорем сложения и умножения вероятностей:

$$p_0 = P(X = 0) = P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03,$$
$$p_1 = P(X = 1) = P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) =$$
$$= 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}07 + 0{,}27 = 0{,}34,$$
$$p_2 = P(X = 2) = P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63.$$

Отсюда ряд распределения случайной величины X имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	0,03	0,34	0,63

(Контроль: $\sum\limits_{i=0}^{2} p_i = 1$.)

Строим многоугольник распределения (рис. 2):

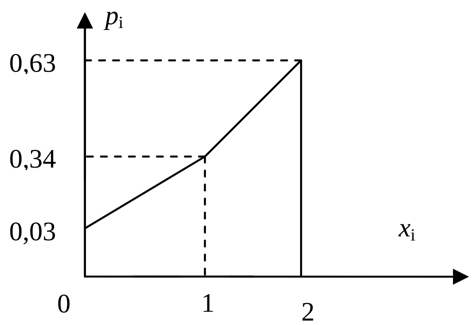

Рис. 2. Многоугольник распределения

3. В лотерее разыгрывается мотоцикл стоимостью 250 руб., велосипед стоимостью 50 руб. и часы ценой 40 руб. Найдите закон распределения случайной величины выигрыша для лица, имеющего один билет, если число билетов равно 100.

Решение. Случайная величина X – выигрыш для лица, имеющего один билет. Она может принимать следующие значения: $x_0 = 0, x_1 = 40, x_2 = 50, x_3 = 250$. Соответствующие им значения p_i найдем, исходя из классического определения вероятности. Если $x_0 = 0$, то выигрыш составляет 0 руб. Всего билетов 100, а невыигрышных 97, значит $p_0 = P(X = 0) = \frac{97}{100} = 0{,}97$. Если значение случайной величины X равно 40, то $p_1 = P(X = 1) = \frac{1}{100} = 0{,}01$. Аналогично находятся p_2 и p_3:

$$p_2 = P(X = 50) = \frac{1}{100} = 0{,}01, \quad p_3 = P(X = 250) = \frac{1}{100} = 0{,}01.$$

Закон распределения имеет вид:

x_i	0	40	50	250
p_i	0,97	0,01	0,01	0,01

(Контроль: $\sum\limits_{i=0}^{3} p_i = 1$.)

4. Дана случайная величина X:

x_i	–2	1	2
p_i	0,5	0,3	0,2

Найдите закон распределения с. в.: а) $Y = 3X$; б) $Z = X^2$.

Решение.

а) Значения случайной величины Y будут равны:

$y_1 = 3 \cdot (-2) = -6, y_2 = 3 \cdot 1 = 3, y_3 = 3 \cdot 2 = 6$ с теми же вероятностями 0,5; 0,3; 0,2. Итак, $Y=3X$:

y_j	–6	3	6
p_j	0,5	0,3	0,2

б) найдем значения случайной величины Z: $(–2)^2=4$; $1^2=1$; $2^2=4$, то есть $z_1 = 1, z_2 = 4$. Искомые вероятности будут равны:

$p_1 = P(Z=1) = 0{,}3$, $p_2 = P(Z=4) = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$. Тогда закон распределения с. в. Z имеет вид:

z_k	1	4
p_k	0,3	0,7

5. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и Y.

X:

x_i	0	2	4
p_i	0,5	0,2	0,3

Y:

y_j	–2	0	2
p_j	0,1	0,6	0,3

Найдите закон распределения случайных величин: а) $Z = X - Y$; б) $Z = X \cdot Y$.

Решение.

а) Составим вспомогательную таблицу:

X \ Y		–2	0	2
		0,1	0,6	0,3
0	0,5	0– (–2)=2	0–0=0	0–2=–2
2	0,2	2– (–2)=4	2–0=2	2–2=0
4	0,3	4– (–2)=6	4–0=4	4–2=2

Итак, с. в. Z может принимать значения: $z_1 = -2, z_2 = 0, z_3 = 2,$ $z_4 = 4, z_5 = 6$. Вероятности соответственно будут равны:

$$p_1 = P(Z=-2) = P(X=0)\cdot P(Y=2) = 0{,}5\cdot 0{,}3 = 0{,}15,$$

$$p_2 = P(Z=0) = P(X=0)\cdot P(Y=0) + P(X=2)\times$$

$$\times P(Y=2) = 0{,}5\cdot 0{,}6 + +0{,}2\cdot 0{,}3 = 0{,}3 + 0{,}06 = 0{,}36,$$

$$p_3 = P(Z=2) = 0{,}05 + 0{,}12 + 0{,}09 = 0{,}26,$$

$$p_4 = P(Z=4) = 0{,}02 + 0{,}18 = 0{,}2,$$

$$p_5 = P(Z=6) = 0{,}03.$$

Тогда закон распределения с. в. Z имеет вид:

z_k	–2	0	2	4	6
p_k	0,15	0,36	0,26	0,2	0,03

(Контроль $\sum p_k = 1$);

б) составим вспомогательную таблицу:

$X \backslash Y$		–2	0	2
		0,1	0,6	0,3
0	0,5	$0 \cdot (-2) = 0$	$0 \cdot 0 = 0$	$2 \cdot 0 = 0$
2	0,2	$2 \cdot (-2) = -4$	$0 \cdot 2 = 0$	$2 \cdot 2 = 4$
4	0,3	$4 \cdot (-2) = -8$	$0 \cdot 4 = 0$	$2 \cdot 4 = 8$

Итак, с. в. Z может принимать значения: $z_1 = -8$, $z_2 = -4$, $z_3 = 0$, $z_4 = 4$, $z_5 = 8$. Вероятности соответственно будут равны:

$$p_1 = P(Z = -8) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03,$$
$$p_2 = P(Z = -4) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02,$$
$$p_3 = P(Z = 0) = 0{,}5 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 =$$
$$= 0{,}05 + 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}12 + 0{,}18 = 0{,}8,$$
$$p_4 = P(Z = 4) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06,$$
$$p_5 = P(Z = 8) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09\ .$$

Итак, с. в. $Z = X \cdot Y$ имеет следующий закон распределения:

z_k	–8	–4	0	4	8
p_k	0,03	0,02	0,8	0,06	0,09

(Контроль $\sum p_k = 1$).

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть X – выручка фирмы в долларах. Найдите распределение выручки в рублях $Z=XY$ в пересчете по курсу доллара Y, если выручка X не зависит от курса Y, а распределения X и Y имеют вид:

X:

x_i	1000	2000
p_i	0,7	0,3

Y:

y_j	25	27
p_j	0,4	0,6

2. Имеются пять ключей, из которых только один подходит к замку. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу проб при открывании замка, если испробованный ключ в последующих попытках не участвует.

3. На пути движения автомобиля шесть светофоров, каждый из которых разрешает или запрещает дальнейшее движение с вероятностью 0,5. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки или до прибытия к месту назначения.

4. В партии из десяти деталей имеется восемь стандартных. Из этой партии наугад взято две детали. Найдите закон распределения случайной величины X – числа стандартных деталей в выборке.

5. Напишите закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений «герба» при трех бросаниях монеты.

6. Дискретная случайная величина X – число мальчиков в семье из пяти детей. Предполагая равновероятными рождение девочки и мальчика: а) найдите закон распределения случайной величины X; б) постройте многоугольник распределения X; в) найдите вероятности событий A:{в семье не менее двух, но не более трех мальчиков}, B:{в семье не более трех мальчиков} и C:{в семье не более одного мальчика}.

7. В партии 10 % нестандартных деталей. Наугад отобраны четыре детали. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и постройте многоугольник полученного распределения.

8. Рабочий обслуживает четыре независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна: для первого станка 0,7, для второго – 0,75, для третьего – 0,8, для четвертого – 0,9. Найдите закон распределения случайной величины X – числа станков, которые не потребуют внимания рабочего.

9. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составьте закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

10. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку последовательно выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется (число патронов не ограниченно). Требуется: а) составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку; б) построить многоугольник полученного распределения.

11. АТС обслуживает 1500 абонентов. Вероятность того, что в течение 3 минут на АТС поступит вызов, равна 0,002. Постройте ряд распределения с. в. X, равной числу вызовов, поступивших на АТС в течение 3 минут. Найдите вероятность того, что за это время поступит более трех вызовов.

12. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Требуется: а) найти закон распределения X; б) построить многоугольник распределения.

13. Две игральные кости одновременно бросают два раза. Напишите закон распределения дискретной случайной величины X – числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях.

14. Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

X:

x_i	–3	3	4
p_i	0,3	0,5	0,2

Y:

y_j	1	2
p_j	0,4	0,6

Найдите закон распределения случайных величин: а) $Z=X+Y$; б) $Z=XY$; в) $Z = X^2$; г) $Z = 3X$.

15. В партии из 25 курток пять имеют скрытый дефект. Покупают три куртки. Найдите закон распределения числа дефектных курток среди купленных. Постройте многоугольник распределения.

16. Из партии в 20 изделий, среди которых имеется шесть бракованных, выбраны случайным образом три изделия для проверки на качество. Постройте ряд распределения случайного числа X хороших изделий среди отобранных.

17. В коробке 20 одинаковых катушек ниток, из них – четыре катушки с белыми нитками. Наугад вынимают две катушки. Найдите закон распределения числа катушек с белыми нитками среди вынутых.

18. Баскетболист делает три штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,7. Постройте ряд распределения числа попаданий мяча в корзину.

19. Имеются три базы с независимым снабжением. Вероятность отсутствия на базе нужного товара равна 0,1. Предприниматель решил закупить некий товар. Составьте закон распределения числа баз, на которых в данный момент этот товар находится.

20. Бросают три игральных кубика. Составьте закон распределения числа выпавших «шестерок» на трех кубиках. Постройте многоугольник распределения.

21. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента равна 0,15. Составьте закон распределения отказавших элементов.

22. Абитуриент должен сдать три экзамена. Вероятность успешной сдачи первого экзамена равна 0,8, второго – 0,7, третьего – 0,7. Постройте ряд распределения числа экзаменов, сданных абитуриентом.

23. Вероятность того, что аудитор допустит ошибку при проверке бухгалтерского баланса, равна 0,05. Аудитору на заключение представлено два баланса. Составьте закон распределения числа правильных заключений на проверяемые балансы.

24. Вероятность сбоя в работе АТС равна 0,1. Составьте закон распределения числа сбоев, если в данный момент поступило пять вызовов.

25. Вероятность того, что автомат при опускании одной монеты срабатывает правильно, равна 0,98. Постройте ряд распределения случайной величины – числа опусканий монет в автомат до первого правильного срабатывания автомата. Найдите вероятность того, что будет опущено пять монет.

26. В магазин привезли арбузы из Ташкента и Камышина в равных количествах. Вероятность покупки неспелого арбуза равна соответственно 0,1 и 0,3. Куплено четыре арбуза. Составьте закон распределения спелых арбузов среди купленных.

27. У продавца имеются изделия, полученные в равных количествах с трех фабрик. Вероятность того, что эти изделия отличного качества, для каждой фабрики соответственно равны 0,8; 0,7 и 0,9. Отобрано два изделия. Составьте закон распределения количества изделий отличного качества среди отобранных.

28. В лотерее 100 билетов, из которых два выигрышных по 50 руб. и 10 выигрышных по 1 руб. стоимость билета 2 руб. Составьте закон распределения суммы чистого выигрыша для лица, купившего два билета. Постройте многоугольник распределения.

29. Среди 15 собранных агрегатов шесть нуждаются в дополнительной смазке. Составьте закон распределения числа агрегатов, нуждающихся в дополнительной смазке, среди пяти наугад отобранных из общего числа.

3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако при решении многих практических задач достаточно знать лишь некоторые числовые параметры, характеризующие отдельные существенные свойства закона распределения. Такие числа принято называть числовыми характеристиками случайных величин.

К числовым характеристикам случайной величины относят: математическое ожидание (центр распределения с. в.), моду, медиану, дисперсию (отклонение значений с. в. от ее центра) и среднее квадратическое отклонение.

Пусть д. с. в. задана законом распределения:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Математическим ожиданием (или средним значением) д. с. в. X называют сумму произведений возможных значений случайной величины на соответствующие им вероятности, то есть:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_i x_i \cdot p_i .$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной, то есть, справедлива формула:

$$M(C) = C .$$

Следствие: $M(X \pm C) = M(X) \pm C$.

2. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания, то есть $M(CX) = CM(X)$.

Следствие: $M(CX \pm C) = CM(X) + C$.

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$M(X_1 + ... + X_n) = M(X_1) + ... + M(X_n).$$

4. Для независимых случайных величин:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot ... \cdot M(X_n).$$

Дисперсией (рассеиванием) д. с. в. называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, то есть:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Или проще, дисперсия д. с. в. равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2,$$

где $M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ... + x_n^2 p_n$.

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1. Дисперсия постоянной величины равна 0, то есть $D(C) = 0$.

Следствие: $D(X \pm C) = D(X)$.

2. Постоянный множитель выносят из-под знака дисперсии в квадрате, то есть $D(CX) = C^2 D(X)$.

Следствие: $D(C_1 X \pm C_2) = C_1^2 D(X)$.

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий, то есть $D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y)$.

4. Если случайные величины X и Y независимы, то

$$D(XY) = M(X^2) \cdot M(Y^2) - (M(X))^2 \cdot (M(Y))^2.$$

Справедливы следующие формулы для $M(X)$, $D(X)$ некоторых распределений:

– Биномиальное распределение: $M(X) = np$; $D(X) = npq$.

– Распределение Пуассона: $M(X) = \lambda$; $D(X) = \lambda$.

– Геометрическое распределение, если оно бесконечно убывающее: $M(X) = \dfrac{1}{p}; D(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

– Гипергеометрическое распределение: $M(X) = n \cdot \dfrac{M}{N}$,

$$D(X) = n \cdot \frac{M}{N-1} \cdot \frac{(N-M)\cdot(N-n)}{N^2}.$$

Дисперсия имеет размерность квадрата с. в. X, что в сравнительных целях неудобно. Если желательно, чтобы оценка разброса (рассеивания) имела размерность с. в., используют среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии, то есть

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что с. в. X примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Так как до значения x_1 случайная величина X не встречалась, то и вероятность события $X < x_1$ равна нулю. Для всех значений $x_1 < x \le x_2$ вероятность события $X < x$ совпадает с вероятностью значения x_1, то есть p_1 и т.д. имеем:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ p_1, & x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i, & x_{n-1} < x \le x_n, \\ 1, & x > x_n. \end{cases}$$

Графически функция распределения выглядит так, как показано рис. 3.

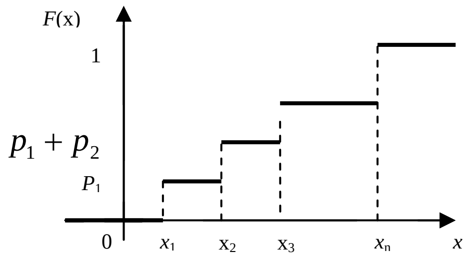

Рис. 3. Функция распределения $F(x)$

Функцию $F(x)$ также называют *интегральной* функцией распределения. Она дает общий способ задания как дискретных, так и непрерывных случайных величин.

Свойства интегральной функции распределения:

1. $F(x)$ ограничена, то есть $F(x) \in [0;1]$.

2. Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси.

3. $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$.

4. Вероятность попадания случайной величины в промежуток $[x_1; x_2)$ равна: $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ (рис. 3).

5. $F(x)$ непрерывна слева, то есть

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0).$$

Модой M_0 дискретной случайной величины *X* называется ее значение, принимаемое с наибольшей вероятностью в ряде распределения.

Математическое ожидание и дисперсия являются частными случаями более общих понятий – моментов случайных величин.

Начальным моментом порядка k случайной величины *X* называется математическое ожидание *k*-ой степени этой величины, обозначается через ν_k, то есть вычисляется по формуле:

$$\nu_k = M(X^k) = \sum_i x_i^k \cdot p_i .$$

В частности, начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию: $\nu_1 = M(X)$.

Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - M(X))^k$, обозначается через μ_k и справедлива формула:

$$\mu_k = M(X - M(X))^k = \sum_i \left(x_i - M(X)\right)^k \cdot p_i .$$

В частности, центральный момент первого порядка равен 0, то есть $\mu_1 = M(X - M(X)) = 0$; центральный момент второго порядка равен дисперсии: $\mu_2 = D(X)$.

Центральные моменты могут быть выражены через начальные моменты. Так,

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

Примеры:

1. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

x_i	48	53	57	61
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Требуется вычислить: а) математическое ожидание $M(X)$; б) дисперсию $D(X)$; в) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$; г) начальные и центральные моменты 1-го и 2-го порядков.

Решение.

а) Математическое ожидание вычислим по формуле:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n.$$
$$M(X) = 48 \cdot 0{,}2 + 53 \cdot 0{,}4 + 57 \cdot 0{,}3 + 61 \cdot 0{,}1 = 54;$$

б) дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \qquad (*)$$

Вычислим все возможные значения квадрата отклонения:

$$(x_1 - M(X))^2 = (48 - 54)^2 = 36,$$
$$(x_2 - M(X))^2 = (53 - 54)^2 = 1,$$
$$(x_3 - M(X))^2 = (57 - 54)^2 = 9,$$

$$(x_4 - M(X))^2 = (61-54)^2 = 49.$$

Чтобы вычислить дисперсию $D(X)$, составим закон распределения квадрата отклонения и затем применим формулу (*):

$(X - M(X))^2$	36	1	9	49
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

$$D(X) = 36 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}3 + 49 \cdot 0{,}1 = 15{,}2.$$

Можно вычислить дисперсию проще по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$:

X^2	48^2	53^2	57^2	61^2
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

$$M(X^2) = 48^2 \cdot 0{,}2 + 53^2 \cdot 0{,}4 + 57^2 \cdot 0{,}3 + 61^2 \times$$
$$\times 0{,}1 = 460{,}8 + 1123{,}6 + 974{,}7 + 372{,}1 = 2931{,}2,$$
$$D(X) = 2931{,}2 - 54^2 = 2931{,}2 - 2918 = 15{,}2;$$

в) среднее квадратическое отклонение вычислим по формуле $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, получим $\sigma = \sqrt{15{,}2} \approx 3{,}9$; г) начальный момент первого порядка: $\nu_1 = M(X) = 54$.

Найдем начальный момент второго порядка по формуле $\nu_2 = M(X^2)$, получим $\nu_2 = 2931{,}2$.

Центральные моменты будут равны: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(X) = 15{,}2$.

2. Из 25 контрольных работ, среди которых пять оценены на «отлично», наугад извлекают три работы. Составьте закон распределения числа работ, оцененных на «отлично» среди отобранных. Найдите функцию распределения $F(x)$ случайной величины и постройте ее график. Найдите для X моду M_0.

Решение. Так как выбирают три работы, то случайная величина X может принимать значения 0; 1; 2; 3. Найдем вероятности этих значений:

$$p_0 = P(X=0) = \frac{C_5^0 \cdot C_{20}^2}{C_{25}^3} = \frac{1 \cdot 1140}{2300} = \frac{114}{230} \approx 0{,}496,$$

$$p_1 = P(X=1) = \frac{C_5^1 \cdot C_{20}^2}{C_{25}^3} = \frac{5 \cdot 190}{2300} = \frac{950}{2300} \approx 0{,}413,$$

$$p_2 = P(X=2) = \frac{C_5^2 \cdot C_{20}^1}{C_{25}^3} = \frac{10 \cdot 20}{2300} = \frac{20}{230} \approx 0{,}087,$$

$$p_3 = P(X=3) = \frac{C_5^3 \cdot C_{20}^0}{C_{25}^2} = \frac{10 \cdot 1}{2300} = \frac{10}{2300} \approx 0{,}004.$$

Искомый закон распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,496	0,413	0,087	0,004

Функцию распределения $F(x)$ найдем по формуле $F(x) = P(X < x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}496, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}909, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}996, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

График представлен на рис. 4:

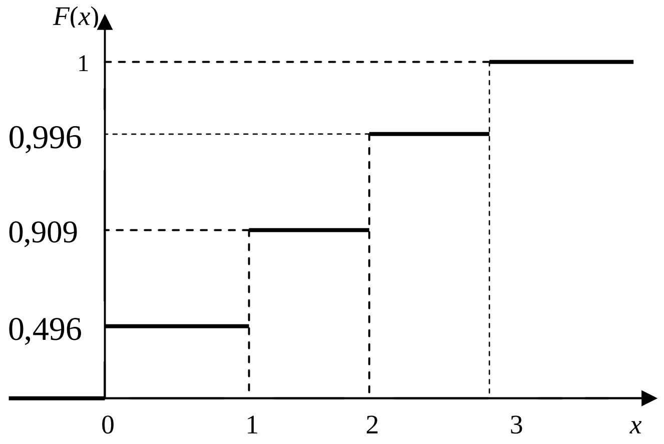

Рис. 4. Функция распределения $F(x)$

Моду найдем по максимальной вероятности в ряде распределения: $M_0 = 0$.

3. Функция распределения с. в. X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 2/3, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

Найдите вероятность того, что случайная величина принимает значение в интервале [1; 3).

Решение.

По формуле $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ имеем:

$$P(1 \le x < 3) = F(3) - F(1) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

4. Даны законы распределения двух случайных величин X и Y:

x_i	10	20
p_i	0,3	0,7

y_i	30	40	60
p_i	0,5	0,2	0,3

Найдите:

а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$; б) $M(2X+Y), D(2X+Y), D(X-Y)$; в) $M(2X+Y)$, составив закон распределения с. в. $Z = 2X + Y$.

Решение.

а) Математическое ожидание вычислим по формуле:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n.$$

$$M(X) = 0{,}3 \cdot 10 + 0{,}7 \cdot 20 = 3 + 14 = 17.$$

Дисперсию вычислим по формуле $D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2$:

$$D(X)=0{,}3\cdot 100+0{,}7\cdot 400-17^2=21.$$

Среднее квадратическое отклонение вычислим по формуле $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$, получим $\sigma(X)=\sqrt{21}\approx 4{,}5$.

Аналогично вычисляем для д. с. в. Y:

$$M(Y)=41;\quad D(Y)=169;\quad \sigma(Y)=13;$$

б) используя свойства математического ожидания и дисперсии, получим:

$$M(2X+Y)=2M(X)+M(Y)=2\cdot 17+41=75,$$
$$D(2X+Y)=2D(X)+D(Y)=4\cdot 21+169=253,$$
$$D(X-Y)=D(X)+(-1)^2D(Y)=21+169=190;$$

в) составим закон распределения для $Z=2X+Y$.

Y \ X		30	40	60
		0,5	0,2	0,3
10	0,3	2·10+30=50	2·10+40=60	2·10+60=80
20	0,7	2·20+30=70	2·20+40=80	2·20+60=100

Итак, с. в. Z может принимать значения: $z_1=50$, $z_2=60$, $z_3=70$, $z_4=80$, $z_5=100$.

Вероятности соответственно будут равны:

$$p_1=P(Z=50)=P(X=10)\cdot P(Y=30)=0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}15,$$
$$p_2=P(Z=60)=P(X=10)\cdot P(Y=40)=0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}06,$$
$$p_3=P(Z=70)=0{,}7\cdot 0{,}5=0{,}35,$$
$$p_4=P(Z=80)=0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}3\cdot 0{,}3=0{,}23,$$
$$p_5=P(Z=100)=0{,}7\cdot 0{,}3=0{,}21.$$

Тогда закон распределения с. в. Z имеет вид:

z_k	50	60	70	80	100
p_k	0,15	0,06	0,35	0,23	0,21

(Контроль $\sum p_k=1$).

$M(2X+Y)=0{,}15\cdot 50+0{,}06\cdot 60+0{,}35\cdot 70+0{,}23\cdot 80+100\cdot 0{,}21=75$.

5. Даны значения случайной величины: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ и $M(X) = 0{,}1,\ M\left(X^2\right) = 0{,}9$. Найдите p_1, p_2, p_3.

Решение. Составим систему из условий:

$$\begin{cases} M(X) = 0{,}1, \\ M(X^2) = 0{,}9, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} -1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 = 0{,}1, \\ (-1)^2 \cdot p_1 + 0^2 \cdot p_2 + 1^1 \cdot p_3 = 0{,}9, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -p_1 + p_3 = 0{,}1, \\ p_1 + p_3 = 0{,}9, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow p_1 = 0{,}4;\ p_2 = 0{,}1,\ p_3 = 0{,}5.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Дан закон распределения дискретной с. в. X:

x_i	8	4	6	5
p_i	0,1	0,3	0,2	0,4

Постройте многоугольник распределения д. с. в.; определите ее числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; покажите $M(X)$ и $\sigma(X)$ на чертеже.

2. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. Составьте закон распределения случайной величины – размера выигрыша при пяти сделанных покупках. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

3. Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составьте закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из пяти выданных. Найдите начальные и центральные моменты трех порядков этой случайной величины.

4. Найдите закон распределения числа пакетов трех акций, по которым владельцем будет получен доход, если вероятность получения дохода по каждому из них равна соответственно 0,5; 0,6; 0,7. Найдите математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины.

5. Торговый агент имеет пять телефонных номеров потенциальных покупателей и звонит им до тех пор, пока не получит заказ на покупку товара. Вероятность того, что потенциальный покупатель сделает заказ, равна 0,4. Составьте закон распределения числа телефонных разговоров, которые предстоит провести агенту. Найдите математическое ожидание, дисперсию и моду этой случайной величины.

6. Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

X_1	2	4	6	8
p	0,4	0,2	0,1	0,3

X_2	0	1	2
p	0,5	0,25	0,25

Составьте закон распределения их разности и проверьте выполнение формул $M(X_1 - X_2) = M(X_1) - M(X_2)$ и $D(X_1 - X_2) = D(X_1) + D(X_2)$.

7. По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика 0,515. Составьте закон распределения с. в. X – числа мальчиков в семье из четырех детей. Найдите математическое ожидание, дисперсию, моду и функцию распределения этой случайной величины.

8. Радист вызывает корреспондента, причем каждый последующий вызов производится лишь в том случае, если предыдущий вызов не принят. Вероятность того, что корреспондент примет вызов, равна 0,4. Составьте закон распределения числа вызовов, если: а) число вызовов не более пяти; б) число вызовов не ограничено.

9. Среди 10 изготовленных приборов три неточных. Составьте закон распределения числа неточных приборов среди взятых наугад четырех приборов. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

10. Вероятность поражения вирусным заболеванием куста земляники равна 0,2. Составьте закон распределения числа кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных кустов. Найдите функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию.

11. В билете три задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй – 0,8, третьей – 0,7. Составьте закон распределения числа правильно решенных задач в билете и вычислите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

12. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8 и уменьшается с каждым выстрелом на 0,1. Составьте закон распределения числа попаданий в цель, если сделано три выстрела. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

13. Дан ряд распределения случайной величины:

x_i	2	4
p_i	p_1	p_2

Найдите функцию распределения этой случайной величины, если ее математическое ожидание равно 3,4, а дисперсия равна 0,84.

14. Из пяти гвоздик две белые. Составьте закон распределения и найдите функцию распределения случайной величины, выражающей число белых гвоздик среди двух одновременно взятых.

15. В магазине продаются пять отечественных и три импортных телевизора. Составьте закон распределения случайной величины – числа импортных из четырех наугад выбранных телевизоров. Найдите функцию распределения этой с. в. и постройте ее график.

16. Охотник, имеющий четыре патрона, стреляет по дичи до первого попадания или до израсходования всех патронов. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,6, при каждом последующем – уменьшается на 0,1. Необходимо: а) составить закон распределения числа патронов, израсходованных охотником; б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

17. Дана функция распределения с. в. X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ 0{,}3 \text{ при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}7 \text{ при } 2 < x \le 3, \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Найдите: а) ряд распределения; б) числовые характеристики; в) постройте многоугольник распределения и график $F(x)$.

18. На двух станках производятся одинаковые изделия. Даны законы распределения числа бракованных изделий, производимых в течение смены на каждом из них:

x_i	0	1	2
p_i	0,1	0,6	0,3

y_i	0	2
p_i	0,5	0,5

Необходимо: а) составить закон распределения числа производимых в течение смены бракованных изделий обоими станками; б) проверить свойство математического ожидания суммы случайных величин.

19. Дискретная с. в. X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1 равна 0,2. Найдите закон распределения X, зная математическое ожидание $M(X)$=2,6 и среднее квадратическое отклонение, равное 0,8.

20. Два консервных завода поставляют продукцию в магазин в пропорции 2:3. Доля продукции высшего качества на первом заводе составляет 90 %, а на втором – 80 %. В магазине куплено три банки консервов. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа банок с продукцией высшего качества.

21. Задан закон распределения:

x_i	2	3	5	6	7	10
p_i	0,4	0,2	0,2	0,05	0,1	0,05

Найдите $M(X)$, $\sigma(X)$ и $M\left(2X^2+3\right)$.

22. Стороны прямоугольного участка X и Y в результате погрешностей измерения оказываются случайными величинами с такими распределениями:

x_i	19,5	19,7	20	20,2
p_i	0,2	0,05	0,7	0,05

y_i	29,5	29,8	30	30,1
p_i	0,15	0,15	0,65	0,05

Найдите математическое ожидание площади участка, если известно, что измерения проводились независимыми способами.

23. Процент людей, купивших новое средство от головной боли после того, как увидели его рекламу по телевидению, есть случайная величина, заданная так:

x_i	0	10	20	30	40	50
p_i	0,1	0,2	0,35	0,2	0,1	0,05

Необходимо: а) убедиться, что задан ряд распределения; б) найти функцию распределения; в) определить вероятность того, что более 20 % людей откликнутся на рекламу.

24. Приблизительно 10 % бутылок бракуются на линии из-за серьезных трещин в стекле. Если две бутылки отобраны случайно, найдите математическое ожидание и дисперсию числа бутылок, имеющих серьезные дефекты.

25. Представитель фирмы, торгующей оборудованием для тяжелой промышленности, ежедневно встречается с одним или двумя покупателями с вероятностями 1/3 и 2/3. В результате каждой встречи продавец может реализовать оборудование на 50000 условных денежных единиц с вероятностью 0,9. Составьте распределение ежедневных продаж. Найдите математическое ожидание и дисперсию стоимости продаж.

26. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,01. Выбирается партия из 200 деталей. Составьте закон распределения с. в. X – числа бракованных деталей в партии, найдите математическое ожидание и дисперсию.

27. В стае 1000 птиц, из них 50 окольцованных. Поймано 100 птиц: а) запишите первые четыре члена ряда распределения числа окольцованных птиц в выборке; б) найдите среднее число окольцованных птиц среди 100 пойманных и его вероятность; в) найдите среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

4. НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Существуют случайные величины, множество значений которых непрерывно заполняют некоторый числовой промежуток. Такие случайные величины можно задать с помощью функции распределения.

Случайная величина X называется ***непрерывной***, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна на всей числовой оси и имеет почти всюду (кроме, возможно, конечного числа точек) непрерывную производную $f(x)=F'(x)$, которую называют *функцией плотности вероятности* или *дифференциальной* функцией распределения. График плотности распределения $f(x)$ называется *кривой распределения*.

Свойства дифференциальной функции распределения:

1. $f(x)\geq 0$.

2. $P(x_1 < X < x_2)=\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ или $P(x_1 < X < x_2)=F(x_2)-F(x_1)$.

На рис. 5 штриховкой указана данная вероятность.

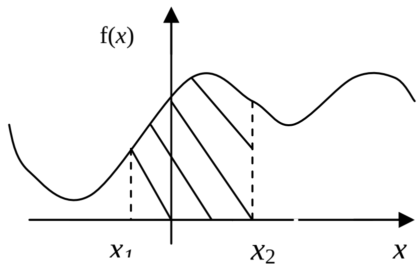

Рис. 5. Функция плотности вероятности $f(x)$

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

4. Если известна функция $f(x)$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет конкретное значение, равна 0.

Примеры:

1. С. в. X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leq 2,\\ c(x-2)^2, & 2<x\leq 3,.\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найдите параметр c, плотность вероятности $f(x)$ и вероятности попадания с. в. X в интервалы (1; 2,5), (2,5; 3,5).

Решение.

Так как с. в. X – непрерывна, то $F(x)$ должна быть непрерывной функцией в любой точке, в частности, и при $x=3$. Так как $F(3)=1$, то $c\cdot(3-2)^2=1$, откуда $c=1$. Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 2, \\ (x-2)^2,\ 2<x\le 3, \\ 1,\ x>3. \end{cases}$$

Плотность вероятности находим по формуле $f(x)=F'(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 2 \\ 2(x-2),\ 2<x\le 3. \\ 0,\ x>3 \end{cases}$$

Вероятность попадания случайной величины X в интервале вычисляется по формуле $P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)$. Подставив в нее данные, получим:

$$P(1<x<2{,}5)=F(2{,}5)-F(1)=0{,}5^2-0^0=0{,}25,$$
$$P(2{,}5<x<3{,}5)=F(3{,}5)-F(2{,}5)=1-0{,}25=0{,}75.$$

2. Плотность вероятности н. с. в. X равна:

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 1, \\ (x-\frac{1}{2}),\ 1<x\le 2, \\ 0,\ x>2. \end{cases}$$

Найдите функцию распределения $F(x)$ и постройте ее график.

Решение.

Функцию распределения найдем по формуле $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Если $x \le 1$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Если $1 < x \le 2$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{1} f(t)dt + \int\limits_{1}^{x} f(t)dt = 0 + \int\limits_{1}^{x}\left(t - \frac{1}{2}\right)dt = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right)\Big|_1^x =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x^2 - x}{2}.$$

Если $x > 2$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{1} f(t)dt + \int\limits_{1}^{2} f(t)dt + \int\limits_{2}^{x} f(t)dt = 0 + \int\limits_{1}^{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)dt + 0 =$$

$$= \frac{\left(t^2 - t\right)}{2}\Bigg|_1^2 = 1 - 0 = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{x^2 - x}{2}, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

График имеет вид (рис. 6):

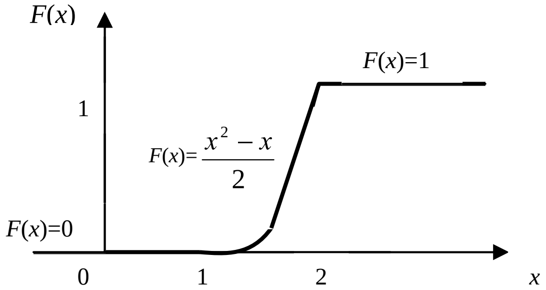

Рис. 6. Функция распределения $F(x)$

3. С. в. X задана функцией плотности вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \; x \le 0, \\ a\left(3x - x^2\right), \; 0 < x \le 3, \\ 0, \; x > 3. \end{cases}$$

Требуется найти: а) коэффициент a; б) $P(1 < x < 4)$; в) функцию $F(x)$; г) построить график $f(x)$ и $F(x)$.

Решение.

а) По свойству 3 дифференциальной функции распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{3} a\left(3x - x^2\right)dx + \int_{3}^{+\infty} 0dx = a\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = a\left(\frac{27}{2} - \frac{27}{3}\right) =$$

$$= \frac{27a}{6} = \frac{9a}{2} = \frac{9a}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{9}.$$

Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 0, \\ \frac{2}{9}\left(3x - x^2\right),\ 0 < x \le 3, \\ 0,\ x > 3; \end{cases}$$

б) используя свойство 2, получим:

$$P(1 < x < 4) = \int_{1}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{4} f(x)dx = \int_{1}^{3} \frac{2}{9}\left(3x - x^2\right)dx + 0 = \frac{2}{9}\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{27}{2} - \frac{27}{3}\right) - \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}\cdot\frac{27}{6} - \frac{2}{9}\cdot\frac{7}{6} = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27};$$

в) если $x \le 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.

Если $0 < x \le 3$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{2}{9}\left(3t - t^2\right)dt =$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{3t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^x = \frac{2}{9}\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right).$$

Если $x > 3$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{3} \frac{2}{9}\left(3t - t^2\right)dt + \int_{3}^{x} 0dt =$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{3t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{2}{9}\left(\frac{27}{2} - \frac{27}{3}\right) - 0 = \frac{2}{9}\cdot\frac{27}{6} = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{2}{9}\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right), & 0 < x \le 3, \\ 1, & x > 3; \end{cases}$$

г) графики $f(x)$ и $F(x)$ представлены на рис. 7.

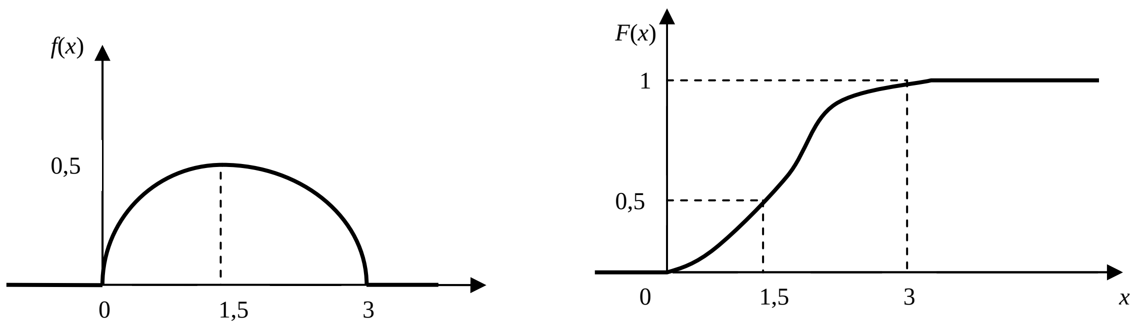

Рис. 7. Функции $f(x)$ и $F(x)$

Задачи для самостоятельного решения

1. С. в. X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1, \\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, & -1<x\le \frac{1}{3}, \\ 1, & x>\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Что вероятнее: попадание с. в. в интервал $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ или $\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

2. С. в. X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2, \\ \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{\pi}\right)\arcsin\left(\frac{x}{2}\right), & -2<x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания с. в. X примет значение, заключенное в интервале $(-1,1)$.

3. Дана функция распределения н. с. в. X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \sin x, & 0<x\le \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите плотность распределения $f(x)$.

4. Интегральная функция распределения н. с. в. X задана выражением:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \; x\le 1, \\ a(x-1)^2, 1<x\le 3, \\ 1, \quad x>3. \end{cases}$$

Найдите: а) коэффициент a; б) $f(x)$. Постройте графики $f(x)$ и $F(x)$.

5. Задана плотность распределения н. с. в. X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \quad x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ a\cos x, -\dfrac{\pi}{2}<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \quad x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите коэффициент a, функцию распределения $F(x)$ и постройте графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

6. Задана плотность распределения н. с. в. X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \quad x\le 0, \\ \dfrac{\sin x}{2}, \; 0<x\le \pi, \\ 0, \quad x>\pi. \end{cases}$$

Найдите: а) функцию распределения; б) вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$; в) постройте графики $f(x)$ и $F(x)$.

7. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X задана в виде $f(x)=\dfrac{2C}{1+x^2}$, $x\in R$. Найдите параметр C.

8. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X задана в интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$ функцией $f(x)=C\sin 4x$. Вне этого интервала $f(x)=0$. Найдите параметр C.

9. Задана плотность распределения н. с. в. X: $f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{A}{x^4}, & x > 1. \end{cases}$

Найдите: а) значение постоянной A; б) функцию $F(x)$; в) вероятность того, что с. в. X примет значение на отрезке [2; 3].

5. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Математическим ожиданием или ***средним значением*** н. с. в. X с плотностью распределения $f(x)$, называется число

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx.$$

Если возможные значения н. с. в. принадлежат промежутку $(a;b)$, то

$$M(X)=\int_{a}^{b} x\cdot f(x)dx.$$

Дисперсией н. с. в. X с плотностью распределения $f(x)$ называется значение интеграла

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2\cdot f(x)dx \text{ или } D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-M^2(X).$$

Если возможные значения н. с. в. принадлежат промежутку $(a;b)$, то

$$D(X)=\int_{a}^{b}(x-M(X))^2\cdot f(x)dx \text{ или } D(X)=\int_{a}^{b}x^2 f(x)dx-M^2(X).$$

Средним квадратическим отклонением называется величина

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Начальным моментом порядка k непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание k-ой степени этой величины, обозначается через ν_k, то есть вычисляется по формуле:

$$\nu_k=M(X^k)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\cdot f(x)dx.$$

Центральным моментом порядка k непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X-M(X))^k$, обозначается через μ_k и справедлива формула:

$$\mu_k=M(X-M(X))^k=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^k\cdot f(x)dx.$$

Так же как и для дискретных случайных величин, центральные моменты могут быть выражены через начальные моменты:

$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2,\ \mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3,$$
$$\mu_4=\nu_4-4\nu_1\nu+6\nu_1^2\nu_2-3\nu_1^4.$$

Среди моментов высших порядков особое значение имеют центральные моменты третьего и четвертого порядков, называемых соответственно коэффициентами асимметрии эксцесса.

Коэффициентом асимметрии («скошенности») A случайной величины X называется величина:

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3} = \frac{M(X - M(X))^3}{(D(X))^{\frac{3}{2}}}.$$

Коэффициентом эксцесса («островершинности») E случайной величины X называется величина:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3 = \frac{M(X - M(X))^4}{(D(X))^2} - 3.$$

Модой $\boldsymbol{M_0}$ н. с. в. X с плотностью распределения $f(x)$ называется такое значение этой величины, при котором функция $f(x)$ достигает максимума.

Медианой $\boldsymbol{M_e}$ н. с. в. X называется такое ее значение, которое определяется равенством $P(X < M_e) = P(X > M_e) = \frac{1}{2}$.

Квантилью порядка p н. с. в. называется ее значение x_p, являющиеся корнем уравнения $P(X < x_p) = p$. Таким образом, x_p является решением уравнения $F(x_p) = p$.

Квантиль порядка $p = \frac{1}{2}$ называется медианой.

Примеры:

1. Найдите математическое ожидание и дисперсию с. в. X, заданной функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

Решение. Найдем $f(x) = F'(x)$: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

Тогда $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot 0 dx + \int\limits^{1} x \cdot 1 dx + \int\limits_{1}^{+\infty} x \cdot 0 dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}.$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X)=\int_0^1 x^2dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

2. С. в. X задана функцией плотности вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Найдите ее числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, моду, медиану, асимметрию и эксцесс.

Решение. Найдем математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{1}{6}\left(2^3-0^3\right)=\frac{4}{3}.$$

Теперь вычислим дисперсию и среднеквадратическое отклонение:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-M^2(X)=\int_0^2 x^2\cdot\frac{x}{2}dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=$$

$$=\left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2=\frac{1}{8}\left(2^4-0^4\right)-\frac{16}{9}=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Мода есть максимум функции плотности распределения вероятностей, то есть $M_0=2$.

Медиану $M_e=b$ найдем из условия $P(X<b)=\int_{-\infty}^{b}\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}$,

то есть $\frac{b^2}{4}=\frac{1}{2}$, откуда $b=M_e=\sqrt{2}$.

Наконец, вычислим асимметрию:

$$A=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=\frac{1}{(\sqrt{2}/3)^3}\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^3\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{27}{4\sqrt{2}}\int_0^2\left(x^3-4x^2+\frac{16}{3}x-\frac{64}{27}\right)\cdot xdx=$$

$$=\frac{27\sqrt{2}}{8}\int_0^2\left(x^4-4x^3+\frac{16}{3}x^2-\frac{64}{27}x\right)dx=\frac{27\sqrt{2}}{8}\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{16}{9}x^3-\frac{32}{27}x^2\right)\Big|_0^2\approx$$

$$\approx -0{,}57$$

и эксцесс:

$$E=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=\frac{3^4}{4}\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^4\cdot\frac{x}{2}dx-3=$$

$$=\frac{81}{8}\int_0^2\left(x^5-\frac{16}{3}x^4+\frac{32}{3}x^3-\frac{256}{27}x^2+\frac{256}{81}x\right)dx-3=$$

$$=\frac{81}{8}\left(\frac{x^6}{6}-\frac{16}{15}x^5+\frac{8}{3}x^4-\frac{256}{81}x^3+\frac{128}{81}x^2\right)\Big|_0^2-3=-0{,}6.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)=\frac{x}{8}$ в интервале (0; 4), вне этого интервала $f(x)=0$. Найдите математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение величины X.

2. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)=C(x^2+2x)$ в интервале (0; 1). Вне этого интервала $f(x)=0$. Найдите параметр C и числовые характеристики величины X.

3. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)=-\frac{3x^2}{4}+6x-\frac{45}{4}$ в интервале (3; 5), вне этого интервала $f(x)=0$. Найдите моду, медиану и математическое ожидание величины X.

4. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)=-\frac{3x^2}{4}+\frac{9x}{2}-6$ в интервале (2; 4), вне этого интервала $f(x)=0$. Найдите моду, медиану и математическое ожидание величины X.

5. Случайная величина X задана в интервале (0; π) плотностью вероятности $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найдите дисперсию величины X.

6. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)=0{,}5\cos x$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найдите математическое ожидание и дисперсию величины X.

7. Найдите математическое ожидание случайной величины X, заданной функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{x}{4}, & 0<x\le 4, \\ 1, & x>4. \end{cases}$

8. Найдите дисперсию с. в. X: $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2, \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, & -2<x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$

9. Дана функция $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ Cxe^{-x}, & x\ge 0. \end{cases}$

Найдите параметр C, числовые характеристики случайной величины X.

10. С. в. X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ x^2, & 0<x\le 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$

Найдите: а) плотность вероятности $f(x)$; б) числовые характеристики с. в. X; в) $P(0{,}5<x<1)$; г) постройте графики $f(x)$ и $F(x)$.

11. Непрерывная случайная величина X распределена в интервале (0; 1) по закону с плотностью вероятности $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\in[0;1], \\ 0, & x\notin[0;1]. \end{cases}$

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=X^2$.

6. ВАЖНЕЙШИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. «ПРАВИЛО ТРЕХ СИГМ»

Для непрерывной случайной величины выделяют равномерное, показательное и нормальное распределения.

1. Н. с. в. X имеет *равномерное* распределение на отрезке $[a;\, b]$, если на этом отрезке плотность распределения вероятности с. в. постоянна, а вне его равна нулю, то есть

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 0, & x>b. \end{cases}$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 1, & x>b. \end{cases}$$

Графики плотности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ для равномерного распределения представлены на рис. 8.

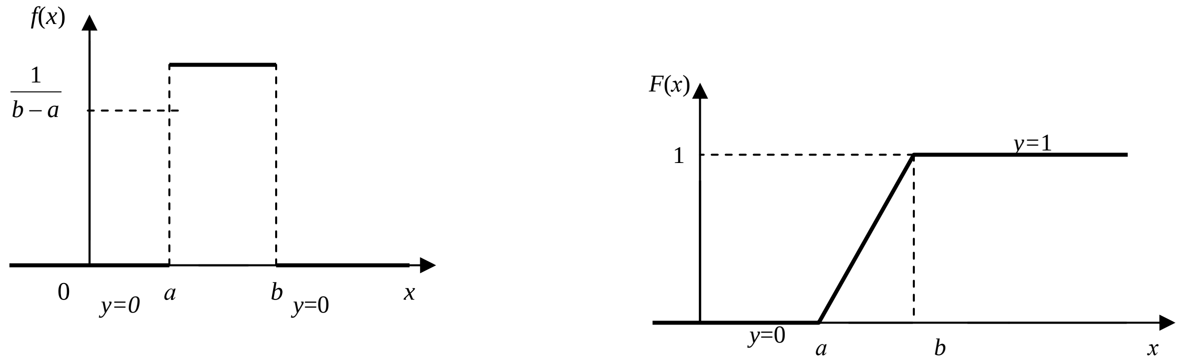

Рис. 8. $f(x)$ и $F(x)$ для равномерного распределения

Вероятность попадания равномерно распределенной с. в. X в интервале $(x_1;\, x_2)$ равна:

$$P(x_1<X<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{b-a}dx=\frac{x_2-x_1}{b-a}.$$

Математическое ожидание $M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\dfrac{a+b}{2}.$

Дисперсия $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)-M^2(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}.$

К случайным величинам, имеющим равномерное распределение, относятся: время ожидания пассажиром транспорта, курсирующего с определенным интервалом; ошибка округления числа до целого (она равномерно распределена на [–0,5; 0,5]), и вообще случайные величины, о которых известно, что все их значения лежат внутри некоторого интервала, и все они имеют одинаковую вероятность (плотность).

2. Непрерывная с. в. X распределена по *показательному* закону, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0, \end{cases}$$

где $\lambda>0$ – параметр показательного распределения. Функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

Графики плотности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ для показательного распределения представлены на рис. 9.

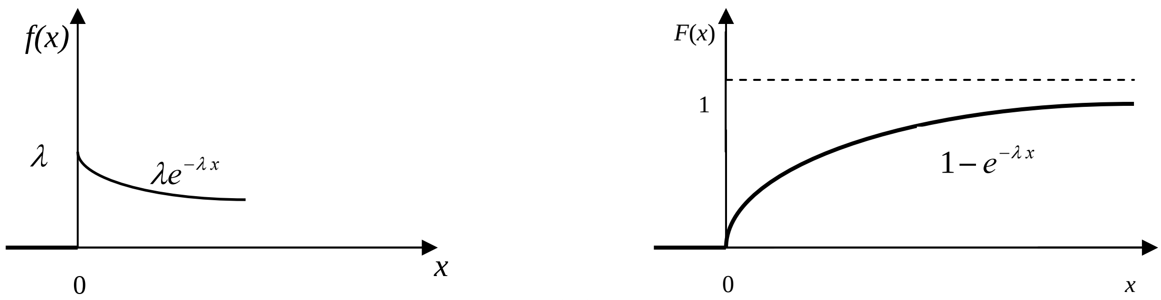

Рис. 9. $f(x)$ и $F(x)$ для показательного распределения

Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по показательному закону, в интервале $(x_1; x_2)$:

$$P(x_1<X<x_2)=e^{-\lambda x_1}-e^{-\lambda x_2}.$$

Математическое ожидание и дисперсия для показательного распределения:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}; \quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Показательное распределение используется в приложениях теории вероятностей, особенно в теории массового обслуживания, в физике, в теории надежности. Оно используется для описания распределения случайной величины вида: длительность работы прибора до первого отказа, длительность времени обслуживания в системе массового обслуживания и т.д.

3. *Нормальное* распределение (распределение Гаусса) – это распределение н. с. в. X, характеризуемое плотностью вероятности:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $a=M(X)$ – математическое ожидание;

σ – среднее квадратическое отклонение с. в. X.

Тот факт, что с. в. X имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, сокращенно записывается так: $X \sim N(a,\sigma)$.

Функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ – функция Лапласа.

Графики плотности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ для нормального распределения представлены на рис. 10.

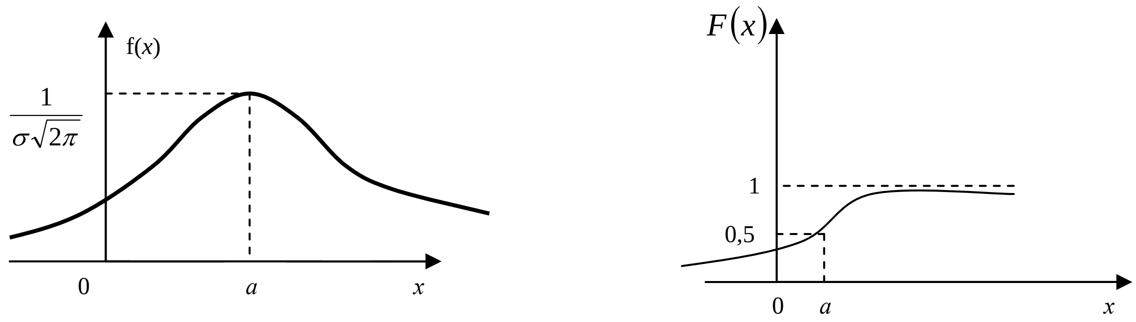

Рис. 10. $f(x)$ и $F(x)$ для нормального распределения

Вероятность того, что с. в. X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\,\beta)$ равна:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Мода и медиана для нормально распределенной с. в. X будут равны: $M_o=a,\quad M_e=a$.

Коэффициенты асимметрии и эксцесса равны: $A=0$ и $E=0$.

Нормальному закону подчиняются ошибки измерений, величины износа деталей в механизмах, рост человека, ошибки при стрельбе, величина шума в радиоприемном устройстве и т.д.

Вероятность того, что с. в. X, распределенная по нормальному закону, отклонится от своего математического ожидания на величину, меньшую положительного числа ε равна:

$$P\left(\left|X-a\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Пологая в равенстве $\varepsilon=3\sigma$, получим:

$$P\left(\left|X-a\right|<3\sigma\right)=2\Phi(3)\approx 0{,}9973,$$

то есть отклонение с. в. X от своего математического ожидания меньше, чем на 3σ – почти достоверное событие.

Получаем известное ***«правило трех сигм»***, которое утверждает, что нормально распределенная с. в. X практически не принимает значений вне интервала $(a-3\sigma;\, a+3\sigma)$.

Примеры:

1. Вагоны данного маршрута городского трамвая идут с интервалом 5 мин. Пассажир подходит к остановке в произвольный момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через минуту после ухода предыдущего вагона, но не позднее чем за две минуты до отхода следующего? Найдите $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение. Время ожидания вагона есть с. в. X, имеющая равномерное распределение вероятностей. Из условия задачи $a=0$; $b=0$.

Тогда, применяя формулу $F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b,\end{cases}$ получим:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x}{5}, & 0\le x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Тогда $P(1 \le X \le 3) = F(3) - F(1) = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

$$M(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+5}{2} = 2{,}5;\ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-0)^2}{12} = \frac{25}{12};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{5}{2\sqrt{3}}.$$

2. Время t расформирования состава через горку – случайная величина, подчиненная показательному закону. Пусть $\lambda = 5$ – среднее число поездов, которые горка может расформировать за 1 час. Определите вероятность того, что время расформирования состава больше 6 мин., но не меньше 24 мин. Найдите $M(X)$, $D(X)$.

Решение. Используя формулу $P(x_1 < X < x_2) = e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2}$, находим: $P(0{,}1 < X < 0{,}4) = e^{-5 \cdot 0{,}1} - e^{-5 \cdot 0{,}4} = 0{,}4712$.

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5};\quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{25}.$$

3. Случайная величина X – время работы электролампочки имеет показательное распределение. Определите вероятность того, что время работы лампочки будет не меньше 600 часов, если среднее время работы 400 часов.

Решение. По условию задачи математическое ожидание с. в. X равно 400 часов, следовательно, $\lambda = \frac{1}{400}$ (так как $M(X) = \frac{1}{\lambda}$). Искомая вероятность $P(X \ge 600) = 1 - P(X < 600) = 1 - F(600)$, где $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{400}x}, x \ge 0 \end{cases}$ и $F(600) = 1 - e^{-\frac{1}{400} \cdot 600} = 1 - e^{-1{,}5}$. Окончательно, $P(X \ge 600) = 1 - \left(1 - e^{-1{,}5}\right) = e^{-1{,}5} = 0{,}2231$.

4. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания амперметра округляют до ближайшего целого деления. Найдите вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

Решение. Ошибку округления отсчета можно рассматривать как случайную величину X, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями. Плотность равномерного распределения $f(x) = 1/(b-a)$, где $(b-a)$ – длина интервала, в котором заключены возможные значения X; вне этого интервала

$f(x)=0$. В рассматриваемой задаче длина интервала, в котором заключены возможные значения *X*, равна 0,1, поэтому $f(x)=1/0{,}1=10$. Легко сообразить, что ошибка отсчета превысит 0,02, если она будет заключена в интервале (0,02; 0,08).

По формуле $P(x_1 < X < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

имеем:

$$P(0{,}02 < x < 0{,}08) = \int\limits_{0{,}02}^{0{,}08} 10dx = 0{,}6.$$

5. Случайная величина *X* распределена по нормальному закону. Математическое ожидание $M(X)=5$; дисперсия $D(X)=0{,}64$. Найдите вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение в интервале (4; 7).

Решение.

По условию задачи имеем: $a=5; \sigma=\sqrt{0{,}64}=0{,}8; \alpha=4; \beta=7$. Подставив эти данные в формулу

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

имеем:

$$P(4 < X < 7) = \Phi\left(\frac{7-5}{0{,}8}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{0{,}8}\right) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) +$$
$$+\Phi(1{,}25) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

6. Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандарта является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Стандартная длина (математическое ожидание) $a=40$ см, среднее квадратическое отклонение $\sigma=0{,}4$ см. Найдите вероятность того, что отклонение длины от стандартной составит по абсолютной величине не более 0,6 см.

Решение. Если *X* – длина детали, то по условию задачи эта величина должна быть в интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, где $a=40; \varepsilon=0{,}6$. Используем формулу:

$$P(|X-a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Подставив данные получим:

$$P(|X-40|<0{,}6)=2\Phi\left(\frac{0{,}6}{0{,}4}\right)=2\Phi(1{,}5)=2\cdot 0{,}4332=0{,}8664.$$

Следовательно, вероятность того, что изготавливаемые детали по длине будут в пределах от 39,4 до 40,6 см, составляет 0,8864.

7. Диаметр деталей, изготовленных заводом, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Стандартная длина диаметра $a=2{,}5$ см, среднее квадратическое отклонение $\sigma=0{,}01$. В каких границах можно практически гарантировать длину диаметра этой детали, если за достоверное принимается событие, вероятность которого равна 0,9973.

Решение.

По условию задачи имеем:

$$a=2{,}5;\ \sigma=0{,}01;\ P(|X-2{,}5|<\varepsilon)=0{,}9973.$$

Применяя формулу $P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$, получим равенство: $2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}01}\right)=0{,}9973$ или $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}01}\right)=0{,}49865$. По табл. А.2 находим, что такое значение функция Лапласа имеет при x=3. Следовательно $\frac{\varepsilon}{0{,}01}=3$; откуда $\varepsilon=0{,}03$. Таким образом, можно гарантировать, что длина диаметра будет изменяться в пределах от 2,47 до 2,53 см.

8. Случайные значения веса зерна распределены нормально. Математическое ожидание веса зерна равно 0,15 г, среднее квадратическое отклонение равно 0,03 г. Нормальные всходы дают зерно, вес которых более 0,1 г. Определите: а) процент семян, от которых следует ожидать нормальные всходы; б) величину, которую не превзойдет вес отдельного зерна с вероятностью 0,99.

Решение.

Пусть с. в. X – вес зерна. По условию $a=M(X)=0{,}15;\ \sigma=0{,}03$.

а) Процент семян, дающих нормальные всходы – это вероятность получить нормальный всход от взятого наугад зерна. По условию нормальный всход бывает у зерен, вес которых более 0,1 г. Следовательно, те зерна, вес которых удовлетворяет условию $X>0{,}1$, дают нормальные всходы. Определяем вероятность этого события.

$$P(0{,}1 < X) = P(0{,}1 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 0{,}15}{0{,}03}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}1 - 0{,}15}{0{,}03}\right) = 0{,}5 +$$

$$+\Phi\left(\frac{0{,}05}{0{,}03}\right) = 0{,}5 + 0{,}4525 = 0{,}9525.$$

Таким образом, от 95,2 % следует ожидать нормального всхода;

б) обозначим искомую величину через β. Находим ее из условия $P(X < \beta) = 0{,}99$ или $P(-\infty < X < \beta) = 0{,}99$. Выражение для вероятности в левой части запишем через функцию Лапласа:

$$P(-\infty < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - 0{,}15}{0{,}03}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - 0{,}15}{0{,}03}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\beta - 0{,}15}{0{,}03}\right) + 0{,}5 = 0{,}99.$$

Отсюда находим значение функции Лапласа: $\Phi\left(\frac{\beta - 0{,}15}{0{,}03}\right) = 0{,}99 - 0{,}5 = 0{,}49$. По табл. А.2 находим значение аргумента для значения функции 0,49; оно равно 2,33, тогда $\frac{\beta - 0{,}15}{0{,}03} = 2{,}33$, отсюда $\beta = 2{,}33 \cdot 0{,}03 + 0{,}15 = 0{,}22$.

Таким образом, вес взятого зерна не будет превышать 0,22 г с вероятностью 0,99.

9. Масса вагона – с. в. *X*, подчиненная нормальному закону распределения с математическим ожиданием $a = 5$ т, средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}9$ т. Покажите выполнение «правила трех сигм».

Решение.

Для подтверждения «правила трех сигм» сначала найдем границы отклонения $(a - 3\sigma;\, a + 3\sigma)$.

$a - 3\sigma = 5 - 3 \cdot 0{,}9 = 2{,}3$; $a + 3\sigma = 5 + 3 \cdot 0{,}9 = 7{,}7$.

Вероятность попадания с. в. *X* в интервал (2,3; 7,7) равна:

$$P(2{,}3 < X < 7{,}7) = \Phi\left(\frac{7{,}7 - 5}{0{,}9}\right) - \Phi\left(\frac{2{,}3 - 5}{0{,}9}\right) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) =$$

$$= 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973.$$

Значит, «правило трех сигм» выполняется.

Задачи для самостоятельного решения

1. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [0; 4]. Найдите функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение величины X.

2. Паром для перевозки автомашин через залив подходит к причалу через каждые два часа. Считая, что время прибытия автомашин случайная величина X – распределено равномерно, определите среднее время ожидания автомашиной прихода парома и дисперсию времени ожидания.

3. С. в. X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le 0, \\ 1-e^{-0,4x}, x>0. \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

4. Плотность вероятности с. в. X имеет вид $f(x)=\begin{cases} 0, \ x \le 0 \\ Ce^{-0,1x}, x>0 \end{cases}$.

Найдите параметр C.

5. Известно, что с. в. $X\sim N(12, 2)$. Найдите вероятность того, что с. в. X примет значение, заключенное в интервале (14; 16).

6. Имеется с. в. $X\sim N(20, 3)$. Найдите интервал, в который с вероятностью $p=0{,}9972$ попадет случайная величина.

7. Известно, что средний расход удобрений на один гектар пашни составляет 80 кг, а среднее квадратическое отклонение расхода равно 5 кг. Считая расход удобрений нормально распределенной случайной величиной, определите диапазон, в который вносимая доза удобрений попадет с вероятностью 0,98.

8. Задано математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной с. в. X. Требуется найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\ \beta)$; б) вероятность того, что абсолютное значение отклонения X-a окажется меньше ε; в) интервал, в который попадет величина X с вероятностью p; г) интервал, в котором практически окажутся все значения величины X («правило трех сигм»).

Задача	a	σ	α	β	ε	p
1	7	3	6	10	1	0,5223
2	12	4	12	16	2	0,5821
3	9	3	9	18	6	0,8904

9. Известно, что с. в. $X \sim N(3, 2)$. Напишите плотность вероятности X.

10. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием, равным 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найдите вероятность того, что длина наугад взятой детали: а) больше 55 мм; б) меньше 40 мм.

11. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ=20 г. Найдите вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превышающей по абсолютной величине 10 г.

12. Н. с. в. X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} \text{ при } x \geq 0, \\ 0 \text{ при } x < 0. \end{cases}$

Найдите вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал (0,13; 0,7).

13. Известно, что с. в. $X \sim N(97, 10)$. Найдите такое β, что $P(102 < X < x) = 0{,}5$.

14. Масса тропического грейпфрута, выращенного в Краснодарском крае, – нормально распределенная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией, равной 0,04. Агрономы знают, что масса 65 % фруктов меньше, чем 0,5 кг. Найдите ожидаемую массу случайно выбранного фрукта.

15. На перекрестке дорог движение регулируется автоматическим светофором, включающим зеленый свет через каждые 2 мин. Время простоя автомобиля у этого светофора, проехавшего на красный свет, есть случайная величина, распределенная равномерно с плотностью на участке (0; 2) мин. Найдите среднее время простоя и среднее квадратическое отклонение.

16. Менеджер ресторана по опыту знает, что 70 % людей, сделавших заказ на вечер, придут в ресторан поужинать. В один из вечеров менеджер решил принять 20 заказов, хотя в ресторане было 15 свободных столиков. Чему равна вероятность того, что более 15 посетителей придут на заказанные места.

17. Срок службы батареек для слуховых аппаратов приблизительно подчиняется показательному закону с λ=1/12. Какова доля батареек со сроком службы более 9 дней.

18. Н. с. в. X распределена по показательному закону с параметром $\lambda=2$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=e^{-X}$.

19. С. в. $X\sim N(0,5)$. Найдите математическое ожидание случайной величины $Y=1-3X^2+4X^3$.

20. Процент всхожести семян равен 90 %. Оцените вероятность того, что из 1000 посеянных семян взойдет от 850 до 950 семян включительно.

21. Среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины равно 0,5. Найдите вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине не превосходит 1.

22. Длина детали представляет собой нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием 150 мм и средним квадратическим отклонением 0,5 мм. Какую точность размера детали можно гарантировать с вероятностью 0,95.

23. Устройство состоит из 20 независимо работающих элементов. Вероятность безотказной работы каждого элемента за 10 часов равна 0,9. Оцените вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за 10 часов окажется меньше двух.

24. Средняя глубина посева семян составляет 3 см. Отдельные отклонения от этого значения случайные, распределены нормально со средним квадратическим отклонением 0,5 см. Определите: а) долю семян, посеянных на глубину менее 4 см; б) долю семян, посеянных на глубину менее 2 см.

25. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально; математическое ожидание размера детали равно 240 мм, среднее квадратическое отклонение равно 0,5 мм. Годными считаются детали, размер которых заключен между 239,5 и 240,5 мм. Определите: а) вероятность изготовления годной детали; б) процент бракованных деталей, если точность изготовления ухудшится и будет характеризоваться средним квадратическим отклонением 0,6 мм.

26. Случайные значения веса зерна распределены нормально. Математическое ожидание веса зерна равно 0,2 г, среднее квадратическое отклонение равно 0,05. Нормальные всходы дают зерна, вес которых более 0,17. Определите: а) процент семян, от которых ожидаются нормальные всходы; б) величину, которую не превзойдет вес отдельного зерна с вероятностью 0,96.

27. Средний диаметр стволов деревьев на некоторой делянке равен 25 см, среднее квадратическое отклонение равно 5 см. Считая, что диаметр ствола – случайная величина, распределенная нормально, определите: а) процент стволов, имеющих диаметр свыше 20 см; б) размер, который не превзойдет диаметр ствола дерева с вероятностью 0,96.

7. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОТНОСТЕЙ

Теория вероятностей изучает закономерности, свойственные массовым случайным явлениям. Если явление носит единичный характер, теория вероятностей способна обычно предсказать лишь результаты в очень широких пределах. Закономерности проявляются именно при большом числе случайных явлений, происходящих в однородных условиях. При этом характеристики случайных величин, наблюдаемых при испытании, становятся устойчивыми. Например, устойчива частота появления события при большом числе испытаний, то же относится и к средним значениям случайных величин.

Группа теорем, устанавливающих соответствие между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин и случайных событий при большом числе испытаний над ними, носит название *предельных теорем теории вероятностей*. К ним относятся Закон больших чисел (группа теорем, включающая, в частности, неравенство Маркова, неравенство и теорему Чебышева, теорему Бернулли) и Центральная предельная теорема Ляпунова.

Неравенство Маркова. Для положительных случайных величин, имеющих математическое ожидание, справедливо неравенство Маркова ($\varepsilon > 0$): $P(X \ge \varepsilon) \le \dfrac{M(X)}{\varepsilon}$. Неравенство Маркова в первоначальной форме или в форме $P(X < \varepsilon) \ge 1 - \dfrac{M(X)}{\varepsilon}$ применяют для оценки вероятности положительных случайных величин с неизвестным законом распределения.

Неравенство Чебышева. Пусть случайная величина X имеет математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания будет по абсолютному значению не меньше любого положительного числа ε, ограничена сверху величиной $\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$, то есть: $P(|X - M(X)| \ge \varepsilon) \le \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ или $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Теорема Чебышева. Если X_i (i=1; 2; 3; …; n) – попарно-независимые случайные величины с математическими ожиданиями

$M(X_i)$ и дисперсиями $D(X_i)$, ограниченными одной и той же постоянной C, то для любого $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Справедлива также оценка:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Следствие. Если в условии теоремы Чебышева случайные величины имеют одинаковые распределения, то есть $M(X_i) = a$; $D(X_i) = \sigma^2$, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1 \text{ и } P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Теорема Бернулли. Пусть m – количество наступлений события A в серии из n независимых испытаний; p – вероятность наступления события A в одном испытании. Тогда для любого $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1 \text{ и } P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Центральная предельная теорема Ляпунова. Теорема показывает, что при достаточно большом числе n независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, подчиненных каким угодно законам распределения (при соблюдении некоторых ограничений), их сумма будет иметь закон распределения, как угодно близкий к нормальному закону.

Теорема. Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ взаимно независимы и имеют один и тот же закон распределения с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2, то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы этих случайных величин $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ неограниченно приближается к нормальному.

В практических задачах часто применяют центральную предельную теорему для определения вероятности того, что сумма нескольких случайных величин окажется в заданных пределах.

Примеры:

1. При стрельбе по мишени, представляющей собой круг 30 см, средняя величина отклонения от центра мишени равна 6 см. Оцените вероятность поражения мишени при одном выстреле.

Решение. По условию задачи $M(X)=6, \quad \varepsilon=30$. Применяя неравенство Маркова, получим: $P(X<30)>1-\dfrac{6}{30}=0{,}8$.

2. Среднее значение длины спички равно 4 см, а среднее квадратическое отклонение 0,2 см. Оцените вероятность того, что длина наугад взятой спички окажется не менее 3,5 см и не более 4,5 см.

Решение. По условию задачи $M(X)=4, \sigma=0{,}2$. Так как длина спички колеблется от среднего значения $\pm 0{,}5$, то $\varepsilon=0{,}5$. Воспользуемся неравенством Чебышева $P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$, где $D(X)=\sigma^2=0{,}04$. Тогда получим:

$$P(|X-4|\leq 0{,}5)\geq 1-\frac{0{,}04}{0{,}5^2}=0{,}84.$$

3. Оцените вероятность того, что бросив монету 200 раз относительная частота появления герба при одном испытании по абсолютной величине отклонится не больше чем на 0,1.

Решение. Из условия задачи $n=200, \varepsilon=0{,}1$. Вероятность того, что появится герб при однократном бросании монеты, равна $p=\dfrac{1}{2}$.

Тогда $q=1-p=\dfrac{1}{2}$.

Воспользуемся теоремой Бернулли $P\left(\left|\dfrac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\dfrac{pq}{n\varepsilon^2}$, тогда получим: $P\left(\left|\dfrac{m}{200}-\dfrac{1}{2}\right|\leq 0{,}1\right)\geq 1-\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{200\cdot 0{,}1^2}=0{,}875$.

4. Для каждой из 2000 независимых с. в. X $D(X)=4{,}5;$ $M(X)=a$. Оцените вероятность того, что среднее арифметическое случайных величин отклоняется от математического ожидания, a по абсолютной величине не более чем на 0,15.

Решение. Воспользуемся следствием из теоремы Чебышева $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - a\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$ и данными из условия задачи $n = 2000,\ \sigma^2 = D(X) = 4{,}5,\ \varepsilon = 0{,}15$.

Тогда имеем: $P\left(\left|\frac{1}{2000}\sum_{i=1}^{2000}X_i - a\right| < 0{,}15\right) > 1 - \frac{4{,}5}{2000\cdot 0{,}15^2} = 0{,}9$.

5. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оцените вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

Решение.

а) Пусть X – число отказавших элементов за время T. Тогда $\varepsilon = 2$, $M(X) = np = 10\cdot 0{,}05 = 0{,}5$, $D(X) = npq = 10\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95 = 0{,}475$.

Воспользуемся неравенством Чебышева:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Тогда получим: $P(|X - 0{,}5| < 2) \geq 1 - \frac{0{,}475}{4} = 0{,}88$.

б) события $|X - 0{,}5| < 2$ и $|X - 0{,}5| \geq 2$ противоположны, поэтому сумма их вероятностей равна единице. Следовательно,

$$P(|X - 0{,}5| \geq 2) \leq 1 - 0{,}88 = 0{,}12.$$

6. Норма высева на 1 га равна 150 кг. Фактический расход семян на 1 га колеблется около этого значения; случайные отклонения характеризуются средним квадратическим отклонением 10 кг. Определите: а) вероятность того, что расход семян на 100 га не превысит 15,1 т; б) количество семян, обеспечивающее посев 100 га с вероятностью 0,95.

Решение.

Обозначим через X_i случайный расход семян на i-ом гектаре. По условию $M(X_i) = a_{x_i} = 150$ кг, $\sigma_{x_i} = 10$ кг. Через X обозначим расход семян на 100 га; этот расход равен сумме расходов каждого гектара: $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$. На основании теоремы Ляпунова случайная величина X будет распределена нормально. Параметры этого распределения таковы:

$$M(X)=a_x=\sum_{i=1}^{100} a_{x_i}\ ;\ M(X)=\sum_{i=1}^{100}150=100\cdot 150=15000\ \text{кг}=15\ \text{т};$$

$$\sigma_x^2=\sum_{i=1}^{100}\sigma_{x_i}^2=\sum_{i=1}^{100}10^2\ ,\ \sigma_x=100\ \text{кг}=0{,}1\ \text{т}.$$

Теперь переходим к определению искомых величин:

а) воспользуемся формулой $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, (значения функции $\Phi(x)$ приведены в табл. А.2), получим:

$$P(X<15{,}1)=P(-\infty<X<15{,}1)=\Phi\left(\frac{15{,}1-15}{0{,}1}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-15}{0{,}1}\right)=$$

$$=\Phi(1)+0{,}5=0{,}3413+0{,}5=0{,}8413.$$

Таким образом, в заданных условиях вероятность того, что 15,1 т семян окажутся достаточными для засева 100 га, равна 0,841;

б) обозначим через $\beta-$ количество семян, обеспечивающее посев с вероятностью 0,95, тогда справедливы соотношения $P(X<\beta)=0{,}95$ или $P(-\infty<X<\beta)=0{,}95$. Воспользуемся опять той же формулой $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, тогда получим:

$$\Phi\left(\frac{\beta-15}{0{,}1}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-15}{0{,}1}\right)=0{,}95;$$

$$\Phi\left(\frac{\beta-15}{0{,}1}\right)+0{,}5=0{,}95;\ \Phi\left(\frac{\beta-15}{0{,}1}\right)=0{,}45.$$

По табл. А.2 находим значение аргумента для полученного значения функции 0,45. Оно равно 1,64, тогда

$$\frac{\beta-15}{0{,}1}=1{,}64;\ \beta=15+0{,}1\cdot 1{,}64=15{,}16\ \text{т}.$$

В заданных условиях 15,16 т семян обеспечат посев 100 га с вероятностью 0,95.

Задачи для самостоятельного решения

1. Игральную кость подбрасывают 10000 раз. Оцените вероятность отклонения частоты появления шести очков от вероятности появления того же числа очков меньше чем на 0,01.

2. В урне 100 белых и 100 черных шаров. Вынули с возвращением 50 шаров. Оцените снизу вероятность того, что количество белых шаров из числа вынутых удовлетворяет двойному неравенству $15<m<35$.

3. Математическое ожидание начальной скорости снаряда равно 600 м/с. Оцените вероятность того, что могут наблюдаться значения начальной скорости, превышающие 900 м/с.

4. Если среднее значение начальной скорости снаряда равно 600 м/с, то какие значения скорости можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,4?

5. Средняя температура в квартире составляет 20 ^{0}С, а среднее квадратическое отклонение равно 2 ^{0}С. Оцените вероятность того, что температура в квартире отклонится от средней по абсолютной величине не более чем на 5 ^{0}С.

6. Игральная кость подбрасывается 180 раз. Оцените вероятность того, что 5 очков появится от 24 до 36 раз двумя способами: а) используя неравенство Чебышева; б) используя интегральную теорему Лапласа.

7. Вероятность получения изделия высшего качества равна 0,8. Проверяется 800 изделий. Случайная величина X – число изделий высшего качества. Укажите промежуток, в котором значения этой случайной величины можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,5.

8. За один рейс автомашина перевозит груз массой в среднем 5 т. Фактический вес в каждом рейсе отклоняется от среднего и характеризуется средним квадратическим отклонением 0,6 т. Определите: а) вероятность того, что за 100 рейсов будет перевезено не менее 488 т груза; б) величину, которую не превзойдет вес перевезенного груза за 100 рейсов с вероятностью 0,98.

9. Норма высева на 1 га равна 160 кг. Фактический расход семян на 1 га колеблется около этого значения. Случайные значения характеризуются средним квадратическим отклонением 10 кг. Определите: а) вероятность того, что расход семян на 100 га не превысит 16,15 т; б) количество семян, обеспечивающих посев 100 га с гарантией 0,99.

10. Путем взятия проб установлено, что потери зерна при уборке составили в среднем 4 г на 1 кв. м. Среднее квадратическое отклонение потерь равно 1,5 г. Определите: а) вероятность того, что на 1 га потери составят не менее 39,8 кг; б) величину, которую не превзойдут потери на 1 га с вероятностью 0,99.

11. Средний вес одного яблока равен 120 г. Отклонение в весе яблок характеризуется средним квадратическим отклонением 40 г. Отбирается наугад 100 яблок. Определите: а) вероятность того, что вес 100 яблок окажется не менее 11,5 кг; б) наибольшее значение, которое не превзойдет вес 100 яблок с вероятностью 0,98.

12. Средний вес плодов в одном ящике равен 12 кг, а среднее квадратическое отклонение в весе плодов одного ящика равно 1,5 кг. Определите: а) вероятность того, что в 100 ящиках окажется не менее 1170 кг плодов; б) наибольшее значение, которое не превзойдет вес плодов в 100 ящиках с вероятностью 0,96.

ЛИТЕРАТУРА

1. Войтенко, М.А. Руководство к решению задач по теории вероятностей: учебное пособие для студентов 2 курса всех специальностей / М.А. Войтенко. – М.: изд. ВЗФЭИ, 1988. – 110 с.

2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 7-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2000. – 479 с.

3. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. – 5-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2000. – 400 с.

4. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей: учебник /Б.В. Гнеденко. – 5-е изд. – М.: Наука, 1969. – 350 с.

5. Гурский, Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики: учебник / Е.И. Гурский. – М.: Высш. шк., 1971. – 445 с.

6. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. II / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 4-е изд. – М.: Высш. шк., 1986, – 415 с.

7. Ермаков, В.И. Сборник задач по высшей математике для экономистов / В.И. Ермаков. – М.: ИНФРА-М, 2004, – 575 с.

8. Карасев, А.И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / А.И. Карасев. – М.: Статистика, 1979. – 423 с.

9. Колде, Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для студентов вузов / Я.К. Колде. – М.: Высш. шк., 1991. – 512 с.

10. Колемаев, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / В.А. Колемаев. – М.: Высш. шк., 1991. – 351 с.

11. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2004. – 573 с.

12. Маркович, Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики: учебник / Э.С. Маркович. – М.: Высш. шк., 1972. – 479 с.

13. Прудников, В.Е. П.Л. Чебышев /В.Е. Прудников. – М.: Знание, 1970. – 212 с.

14. Четыркин, Е.М. Вероятность и статистика: учебное пособие / Е.М. Четыркин, И.Л. Калихман. – М.: Финансы и статистика, 1992. – 523 с.

15. Ученые записки МГУ. – 1947. – Вып. 91. – с. 56.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А.1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4,3	0,00004	0,00004	0,00004	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003
4,4	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002
4,5	0,00002	0,00002	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
4,6	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
4,7	0,000006									
4,8	0,000004									

Таблица А.2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2}\, dz$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997
4	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998
4,1	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,499985		0,499986
4,2	0,499987		0,499988		0,499989		0,499990		0,499991	
4,3	0,499991	0,499992		0,499993				0,499994		
4,4	0,499995					0,499996				
4,5	0,499997									
4,6	0,499998									
4,7	0,499999									
4,8	0,499999									

Учебное издание

Бурлакова Екатерина Анатольевна
Колпакова Светлана Валерьевна
Копанева Анна Александровна

МАТЕМАТИКА.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ЧАСТЬ 2.
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Учебное пособие

Редактор В.Л. Сверчкова
Технический редактор Н.А. Соловьева

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Государственный университет - учебно-научно-
производственный комплекс»
Лицензия ИД № 00670 от 05.01.2000 г.

Подписано к печати 30.12.2011 г. Формат 60х90 1/16.
Усл. печ. л. 4,3. Тираж 100 экз.
Заказ №______

Отпечатано с готового оригинал-макета
на полиграфической базе ФГБОУ ВПО «Госуниверситет - УНПК»,
302030, г. Орел, ул. Московская, 65.