

Серия

«Строительство. Транспорт»



СОДЕРЖАНИЕ

• ТЕОРИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ.  
СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА**

Председатель:

*Голенков В.А.* д.т.н., проф.

Зам. председателя:

*Борзенков М.И.* к.т.н., доц.

*Гордон В.А.* д.т.н., проф.

*Колчунов В.И.* акад. РААСН, д.т.н., проф.

*Константинов И.С.* д.т.н., проф.

*Одолеева М.В.*

*Поландова Л.И.*

*Радченко С.Ю.* д.т.н., проф.

*Садков В.Г.* д.э.н., проф.

*Светкин В.В.* к.т.н., доц.

*Снежко О.А.* к.т.н., доц.

*Степанов Ю.С.* д.т.н., проф.

*Фролова Н.А.* к.соц.н., доц.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ**

Главный редактор:

*Колчунов В.И.* акад. РААСН, д.т.н., проф.

Зам. главного редактора:

*Гончаров Ю.И.* д.т.н., проф.

*Колесникова Т.Н.* д. арх., проф.

*Коробко В.И.* д.т.н., проф.

Члены редколлегии:

*Бондаренко В.М.* акад. РААСН, д.т.н., проф.

*Зорин В.А.* д.т.н., проф.

*Карпенко Н.И.* акад. РААСН, д.т.н., проф.

*Коробко А.В.* д.т.н., проф.

*Король Е.А.* чл.-корр. РААСН, д.т.н., проф.

*Меркулов С.И.* д.т.н., проф.

*Новиков А.Н.* д.т.н., проф.

*Ольков Я.И.* акад. РААСН, д.т.н., проф.

*Рылишин В.И.* чл.-корр. РААСН, д.т.н., проф.

*Серпик И.Н.* д.т.н., проф.

*Ушаков Л.С.* д.т.н., проф.

*Федоров В.С.* чл.-корр. РААСН, д.т.н., проф.

*Чернышов Е.М.* акад. РААСН, д.т.н., проф.

Отв. секретарь:

*Никулин А.И.* к.т.н., доц.

Зам. отв. секретаря:

*Данилевич Д.В.* к.т.н., доц.

Технический секретарь:

*Блинников Е.А.*

Компьютерная верстка:

*Солопов С.В.*

**АДРЕС РЕДАКЦИИ СЕРИИ**

302020, Россия, г. Орел, Наугорское шоссе, 29.

Факультет транспорта и строительства.

Редколлегия журнала Известия ОрелГТУ.

Серия «Строительство. Транспорт».

тел.: (4862) 41-98-05; 76-29-94;

факс: (4862) 43-92-41; e-mail: anto@ostu.ru

Зарегистрировано в Министерстве РФ по

делам печати, телерадиовещания и средств

массовой информации.

Свидетельство: ПИ № 77-15496 от 20 мая

2003 г.

Формат 69×90/8. Печать ризография. Бумага

офсетная. Усл. печ. л. 8,5. Тираж 500 экз.

Подписной индекс 86294 по каталогу

«ПРЕССА РОССИИ»

© ОрелГТУ, 2007

<i>Бондаренко В.М., Ключева Н.В., Дегтярь А.Н., Андросова Н.Б.</i> Оптимизация живучести конструктивно нелинейных железобетонных рамно-стержневых систем при внезапных структурных изменениях.	5
<i>Бондаренко В.М., Ларионов Е.А.</i> К энергетической концепции теории железобетона.	11
<i>Горностаев С.И., Скобелева Е.А.</i> Методика экспериментальных исследований параметров деформативности и трещиностойкости железобетонных конструкций составного сечения с преднапряженной рабочей арматурой.	20
<i>Жгутов В.М.</i> Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учете различных свойств материала.	23
<i>Ковырягин М.А.</i> О возможности регулирования напряженно-деформированного состояния при различных моделях описания динамического поведения конструкций.	27
<i>Коробко В.И., Алдушкин Р.В.</i> Рациональное усиление металлических балок постановкой преднапряженных затяжек.	32
<i>Коробко В.И., С.А. Морозов.</i> Оптимальное проектирование пластинок ступенчато-переменной жесткости, находящихся в предельном состоянии.	39
<i>Коробко А.В., Чикулаев А.В.</i> Решение задачи устойчивости сферической оболочки.	44
<i>Меркулов Д.С.</i> Прочность составных железобетонных элементов при сложном напряженном состоянии.	48
<i>Парфенов С.Г., Прокуров М.Ю., Пикин Д.Ю.</i> Конечно-элементный анализ живучести пространственных складчатых систем на ЭВМ.	52
<i>Парфенов С.Г., Тамразян А.Г., Буро П.А., Черный И.В.</i> Методика численного расчета стержневых систем на сейсмические воздействия с учетом податливости основания.	55
<i>Поварова И.Б.</i> Анализ устойчивости тонких пологих оболочек под действием поперечной распределенной нагрузки.	58
<i>Сенюшенков М.А., Викторов Д.А.</i> Расчетная экспертиза несущих стальных конструкций типового проекта здания свинокомплекса и разработка нового экономического варианта.	62
<i>Серпик И.Н., Смашинева М.И., Тютюнников А.И.</i> Стержневая многослойная схема для расчета железобетонных рам методом конечных элементов.	66
<i>Сморчков А.А., Северина И.В.</i> Оценка напряженно-деформированного состояния модели клефанерной плиты с различными толщинами обшивок.	71
<i>Трещев А.А., Сазонов А.П.</i> Геометрически нелинейный изгиб тонких пластин из материалов с усложненными свойствами.	74
<i>Трещев А.А., Теличко В.Г.</i> Решение задачи об изгибе железобетонной оболочки положительной гауссовой кривизны, опертой на типовые фермы ФКБ-24.	80
<i>Уткин В.С., Плотникова О.С., Галаева Н.Л.</i> Определение надежности элементов по критерию прочности при вероятностных и возможностных базовых параметрах в математической модели предельного состояния.	86

Научный журнал «Известия ОрелГТУ». Серия «Строительство. Транспорт» входит в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук.

• **БЕЗОПАСНОСТЬ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ**

Борисова О.В. Определение величины страховой суммы и страховых тарифов при страховании строительных объектов.....	91
Кожухар В.М. Обоснование экономической эффективности инженерных мероприятий по повышению радиационной безопасности недвижимости.....	95
Кожухар В.М. Проблемы обеспечения радиационной безопасности пребывания человека в недвижимости.....	97
Митрохин А.В. Метод контроля и автоматического устранения утечек воды в отопительных контурах .....	99
Сморчков А.А., Лифанова В.И. Конструктивная безопасность изгибаемых элементов из клееной древесины при проектировании и эксплуатации.....	102
Тамразян А.Г. К обоснованию приемлемого уровня риска.....	107
Тамразян А.Г. К эффективности мероприятий повышения безопасности высотных зданий.....	109
Тамразян А.Г. Риск-анализ живучести здания при аварийных воздействиях.....	113
Щербакова Е.В. Программное обеспечение для снижения уровня шума в условиях «производство – окружающая среда».....	115

• **АРХИТЕКТУРА И ГРАДОСТРОИТЕЛЬСТВО**

Аббасов П.А., Смирнова Г.Н., Гричкова Н.В. Актиноклиматологическая характеристика территории юга Дальнего Востока России для использования солнечной энергии в строительстве.....	118
Бутенко В.А. Оптимальная дата восстановления памятников музеефикации в Пушкинском заповеднике.....	123
Высочин И.А. Анализ экологических проблем городской среды мегаполиса и пути их устранения.....	127
Городков А.В., Никулочкина Е.И. Принципиальные схемы средозащитного озеленения территорий микрорайонов и кварталов.....	129
Городков А.В., Фурина В.Н. Тенденции формирования дискомфортных зон по факторам шума и атмосферного загрязнения в среде парков, садов и скверов.....	133
Громова В.С., Бурак В.Е., Буланова Л.Г., Пчеленок О.А. Сравнительный анализ содержания тяжёлых металлов в полосах отвода железной дороги.....	137
Громова В.С., Дмитровская Т.А., Буланова Л.Г. Влияние токсичных аэрозолей железнодорожного транспорта на экосистемы селитебных зон г. Орла.....	140
Зобова М.Г. Классификация физкультурно-спортивных зданий и сооружений специализированного назначения.....	143
Ивашук О.А. Модели автоматизированной системы экологического мониторинга в зоне влияния городских автодорог.....	146
Ильичев В.А., Колчунов В.И., Воробьев С.А., Поздняков А.Л. Анализ материалов экологических изысканий для устойчивого развития малых и средних городов России.....	153
Колесникова Т.Н., Морозова Е.В. Архитектурно-ландшафтные аспекты урбоэкологии.....	159
Лазарева М.В. Принципы применения ландшафтных компонентов в современном деловом центре.....	162
Литвинов Д.В. Роль природно-климатического фактора в организации рекреационной деятельности прибрежных территорий крупных городов Среднего Поволжья.....	164
Пиневич Н.В. Разработка методологических подходов к оценке безопасности среды обитания человека на основе биомониторинга урбоэкосистемы.....	169
Плотников В.В., Тарасова Н.В. Влияние температурно-влажностных воздействий на долговечность ограждающих конструкций.....	172
Семичева Н.Е., Ежов В.С., Кобелев Н.С. Повышение эффективности утилизации тепла агрессивных вентиляционных выбросов.....	176
Филанова Т.В. Принципы выявления локальных образований на территории крупнейшего города.....	180
Хаустов В.В. Рациональный вариант решения проблемы захламенности городских земель строительными отходами в г. Курске.....	186
Цыганков В.В., Винников Ю.А., Цыганков С.Ю. Вопросы моделирования экологического контроля эффективности противозумных мероприятий в городской среде.....	190

• **СТРОИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕРИАЛЫ**

<b>Баженов Ю.М., Плотников В.В.</b> Влияние активированных наноструктур на процессы структурообразования вяжущих композиций при отрицательных температурах.....	195
<b>Гегерь В.Я., Федоренко Е.А.</b> Радиационно-экологические проблемы строительного комплекса и пути их решения радиофизическими методами.....	200
<b>Киреев И.Б., Ковалевский В.В., Федоренко Е.А.</b> Использование фосфоритного песка для производства пенобетона.....	203
<b>Пархоменко В.И., Винокурова М.А.</b> Поиски решений снижения выхода радиоактивного газа $Rn^{222}$ из железобетонных плит покрытий, используемых в жилищном строительстве.....	206
<b>Цублова Е.Г.</b> Биоповреждения строительных материалов и изделий как эколого-технологическая проблема.....	210
<b>Чернышов Е.М., Н.Д. Потамошнева, Акулова И.И.</b> Природное и техногенное сырье промышленности строительных материалов как технико-экономическая и экологическая альтернатива.....	213

• **АВТОМОБИЛИ, СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ,**

**СЕРВИС И РЕМОНТ**

<b>Бакаева Н.В.</b> Вопросы регионального развития технического сервиса автотранспортных средств с позиций безопасности.....	215
<b>Кузин Н.В., Александров А.С.</b> Об изменении напряжения вертикального сжатия в дорожных конструкциях.....	221
<b>Новиков А.Н., Ивашук О.А., Васильева В.В.</b> Управление воздействием потоков автотранспорта на качество акустической среды города на основе информационных технологий.....	226

## ПРЕДИСЛОВИЕ

*Насущная проблема обеспечения безопасности среды обитания, ставшая еще более актуальной в XXI веке и связанная с условиями развития экономики, политическими, технолого-экологическими и демографическими тенденциями развития в сочетании с угрозой энергетико-сырьевого кризиса, ставит все новые научно-технические задачи, требующие скорейшего практического воплощения. Острота этой проблемы может быть снижена путем реализации новых инженерно-технических и архитектурно-планировочных решений и проведения научных исследований, направленных на разработку основ ее преодоления.*

*В то же время, состояние отечественного архитектурно-градостроительного комплекса связано со значительным износом основных строительных фондов, необходимостью реконструкции сложившейся застройки городских территорий, потребностью в доступном жилье, при смещении приоритетов строительного проектирования и отставании его нормативных положений от социально-экономической ситуации. Отдельные аспекты данной проблематики положены в основу многочисленных научных исследований, проводимых в рамках государственных программ развития.*

*Доклады Международных академических чтений «Биосферно-совместимая безопасная среда обитания с позиций архитектурно-градостроительного комплекса», проведенные Российской академией архитектуры и строительных наук на базе Брянской государственной инженерно-технологической академии 29-30 ноября 2007 г., охватывают широкий спектр экологических, технических и социально-экономических направлений и являются весомым научным вкладом в решение проблемы обеспечения безопасности среды обитания человека.*

Вице-президент РААСН,  
академик РААСН,  
д.т.н., проф. В.А. Ильичев

Ректор БГИТА,  
канд. тех. наук,  
проф. В.И. Микрин

## ТЕОРИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ. СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

УДК 624.074.4: 621.328

Академик РААСН, докт. техн. наук, проф. В.М. Бондаренко; канд. техн. наук, доц. Н.В. Клюева;  
канд. техн. наук, доц. А.Н. Дегтярь; аспирант Н.Б. Андросова  
(Орловский государственный технический университет)  
Россия, г. Орел, тел. 8 (4862) 41-98-05; e-mail: ftis\_dek@ostu.ru

### ОПТИМИЗАЦИЯ ЖИВУЧЕСТИ КОНСТРУКТИВНО НЕЛИНЕЙНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ РАМНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ ВНЕЗАПНЫХ СТРУКТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЯХ

В настоящее время рост экологоагрессивных и запроектных воздействий техногенного и природного характера требует поиска новых подходов к концепции создания и эксплуатации зданий и сооружений, в которой приоритетными выступают требования, определяемые понятиями «конструктивная безопасность» и «живучесть» [1]. Такой анализ будет включать установление связи между конструктивными решениями несущих систем, характером воздействий на них, применяемыми материалами и их безопасностью. В научных работах проф. Г.А. Гениева, И.Е. Милейковского, В.И. Колчунова сформулированы задачи о прогрессирующих (лавинообразных) разрушениях стержневых конструктивных систем вследствие выключения из работы отдельных элементов, сечений, узлов, а также вопросы оптимизации конструктивной безопасности зданий и сооружений. Дальнейшее развитие данного направления видится в исследовании вопросов конструктивной безопасности с учетом дефектов, повреждений и износа конструкций, а также в оценке живучести и оптимизации параметров живучести конструкций при внезапных структурных изменениях.

В настоящей статье на основе методики и ранее разработанного алгоритма расчета живучести внезапно повреждаемых рамных систем [2, 3, 4], предложено развитие этого решения с учетом особенностей разрушения железобетонных элементов. Суть предложения состоит в том, что в процессе нагружения рамной системы и изменения конструктивных и, соответственно, расчетных схем (вызванного образованием пластических шарниров) в ней возникают односторонние моментные связи. Другими словами, образование того или иного пластического шарнира зависит от расчетной схемы на рассматриваемом уровне нагрузки, интенсивности и схем армирования элементов конструкций.

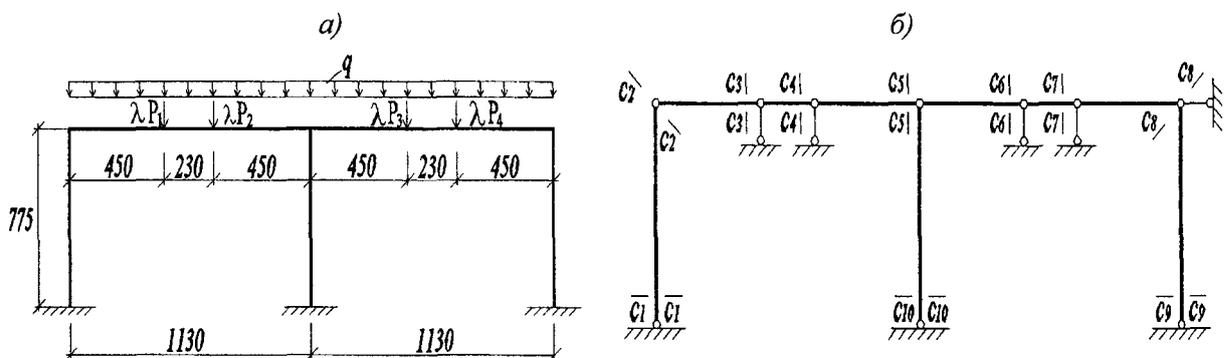


Рис. 1. Расчетная схема двухпролетной рамы (а) и основная система рамы с возможными сечениями появления шарниров (б)

В основу метода расчета рамы положена идея построения расчетной схемы по аналогии с расчетными схемами многосвязных пространственных систем коробчатого типа, обеспечивающая

неизменяемость структуры исходных уровней при видоизменении исходной расчетной схемы [2]. Преимущество применения смешанного метода заключается в том, что не приводит к изменению основной системы и позволяет ограничиться только несложным преобразованием исходной системы уравнений.

Система уравнений неординарного смешанного метода имеет вид (рис. 2):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{j=k} \delta_{ij} \cdot M_j + \sum_{j=1}^{j=k} \delta'_{ij} \cdot Z_j + \sum_{i=1}^{i=k} \Delta_{ip} + \sum_{i=1}^{i=k} \delta_{ip} \cdot \lambda = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \\ \sum_{j=k+1}^{j=n} r'_{ji} \cdot M_j + 0 + \sum_{j=k+1}^{j=n} R_{jp} + \sum_{i=k+1}^{i=n} r_{ip} \cdot \lambda = 0, \quad (i = k+1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\delta_{ji}$ ,  $\delta'_{ji}$ ,  $r'_{ij}$  - коэффициенты при неизвестных (единичные перемещения и реакции) смешанного метода расчета статически неопределимых систем;  $\Delta_{ip}$  и  $R_{ip}$  - грузовые коэффициенты (перемещение и реакции соответственно) от постоянной нагрузки;  $\delta_{ji}$  - перемещение по направлению  $i$ -ой удаленной связи от внешней параметрической нагрузки при  $\lambda=1$ ;  $r_{ip}$  - реакция в  $i$ -ой наложенной связи основной системы от внешней параметрической нагрузки при  $\lambda=1$ .

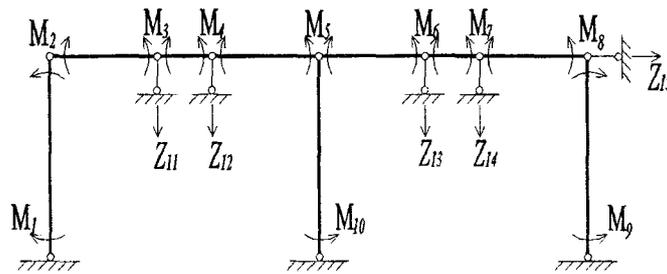


Рис. 2. Основная система рамной конструкции для расчета с помощью неординарного смешанного метода

За критерий живучести системы принимается величина действующей на нее нагрузки, равная величине нагрузки, при которой рассматриваемая система переходит в изменяемую систему без лишних связей. Для превращения  $n$ -раз статически неопределимой системы в геометрически изменяемую систему без лишних связей необходимо исключить из нее не менее  $(n+1)$  связей. Методами строительной механики определяется величина нагрузки, которая вызывает изменяемость системы. При внезапном приложении нагрузки в условиях чрезвычайных ситуаций природного или техногенного характера в конструктивной системе возникают динамические догружения, и при расчете к величине статической нагрузки должна добавляться динамическая составляющая.

Таким образом, в данном случае постановка задачи расчета рамы на первом этапе сводится к определению предельной величины параметра  $\lambda_m$ , при котором исчерпывается несущая способность рамы, нагруженной статической нагрузкой, в условиях внезапного аварийного динамического догружения.

Значения усилий в выключающихся связях от суммарного воздействия заданной и параметрической нагрузок (с учетом динамического эффекта) определяются по формулам.

Для всех усилий в выключающихся связях должна удовлетворяться система неравенств:

$$|M_j| \equiv |M_{jp} + m_{jp} \cdot \lambda| \leq M_{j,np}^0 \quad (j = 1, 2, \dots, k); \quad (2)$$

$$M_{j,np}^0 = \varphi_j M_{j,np}^c, \quad (3)$$

где  $M_{j,np}^c$  - предельное значение статического усилия в  $j$ -ой выключающейся связи; значение коэффициента увеличений динамических усилий в сечениях элементов балочной системы  $\varphi_j$  можно определить по [5, формула (6.12)].

Предельное значение статического момента в  $j$ -ой связи для коррозионно повреждаемой эксплуатируемой конструкции может быть определено как ресурс сопротивления по нормальному се-

чению поврежденного коррозией железобетонного элемента. Если использовать предложенную В.М. Бондаренко модель для определения функции повреждений  $k(z)$ , то момент исчерпания силового сопротивления наиболее напряженного сечения во времени несложно определить в рамках, традиционных для железобетона статических схем по расчету нормальных сечений.

Задача моделирования прогрессирующего (лавинообразного) обрушения рамной системы, в конечном итоге, сводится к отысканию локального начального отказа в одном из наиболее напряженных сечений системы и последовательности распространения этого отказа (последовательности выключения новых связей) с учетом нарастающего уменьшения степени статической неопределенности системы, а также с учетом динамического эффекта, вызванного внезапностью включения первой связи.

Признаком окончания решения (исчерпания живучести) системы будет образование геометрически изменяемой системы после выключения очередной связи. Для выявления этого признака на каждом шаге после выполнения преобразований системы уравнений вычисляется определитель матрицы смешанного метода коэффициентов при неизвестных. Если определитель равен нулю, то имеем геометрически изменяемую систему. В противном случае живучесть системы считается не исчерпанной, и решение продолжается.

В качестве примера расчета рассмотрим двухпролетную раму, представленную на рисунке 1 и нагруженную сосредоточенными силами. Принимаем, что сосредоточенные силы равны  $P_i \cdot \lambda = 2,4 \cdot \lambda$ . В результате расчета первым образуется пластический шарнир в сечении  $c_5$  при:

$$\lambda^{(1)} = \min \lambda = \frac{(M_{j, np}^0 \mp |M_{ip}|)}{|m_{ip}|} = \frac{1 - 0,010}{0,673} = 1,47.$$

Эпюра изгибающих моментов для этого случая представлена на рисунке 3, а.

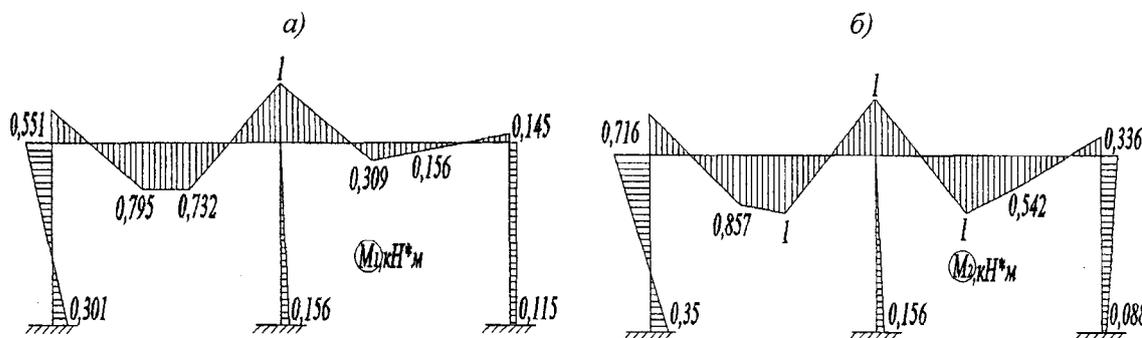


Рис. 3. Эпюры изгибающих моментов на первом этапе разрушения (а), на втором этапе разрушения (б)

Формируем систему уравнений смешанного метода для новой системы с одним пластическим шарниром. Данная система является исходной для второго шага решения задачи. Решая задачу на втором шаге, получим, что второй пластический шарнир образуется в сечениях  $c_4$  и  $c_6$  (рис. 3, б):

$$\Delta \lambda^{(1)} = \min \Delta \lambda = \frac{(M_{j, np}^0 \mp |M_{ip}|)}{|m_{ip}|} = \frac{1 - 0,801}{0,825} = 0,241;$$

$$\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} + \Delta \lambda^{(1)} = 1,47 + 0,241 = 1,71.$$

После решения третьего шага задачи образуются пластические шарниры в сечениях  $c_3$  и  $c_7$ . Образование третьего пластического шарнира в пролете рамы приводит к тому, что система становится геометрически изменяемой, и, таким образом, ее несущая способность исчерпывается при  $\lambda^{(3)} = 1,84$  кН. На данном этапе решение заканчивается, т.к. образовывается геометрически изменяемая система.

Используя результаты расчета первого этапа определения несущей способности рамы, в частности, зная величину разрушающей нагрузки и последовательность выключения связей в элементах системы (при которой система превращается в кинематически изменяемую систему), на втором этапе расчета производится оптимизация параметров ее живучести.

В основу оптимизации параметров живучести систем положен принцип эквиградиентности Г.А. Гениева [6]. Методика строится на вероятностной модели и позволяет учесть изменчивость свойств материалов, характеристик сечений, нагрузок и других факторов, определяющих несущую способность конструкций.

Пусть имеется некоторое определяющее соотношение вида:

$$D = D(Q, q_1, q_2, \dots, q_n) = 0. \quad (4)$$

Искомая величина  $Q$ , экстремальное значение которой представляет интерес, с параметрами  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , связанными между собой условием:

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = C = \text{const}. \quad (5)$$

Принципу эквиградиентности можно дать следующую интерпретацию [7]. Необходимые условия оптимальности некоторой механической (или иной) системы, подчиняющейся соотношению вида (4), будут выполняться только в том случае, если приращения искомой величины  $Q - \Delta Q^{(i)}$ , соответствующие малым конечным приращениям параметров  $q_i$ , будут прямо пропорциональны этим приращениям  $\Delta q_i$ .

$$\text{При } \Delta q_1 = \Delta q_2 = \dots = \Delta q_n \text{ из (5) следует } \Delta Q^{(1)} = \Delta Q^{(2)} = \dots = \Delta Q^{(n)}, \quad (6)$$

т.е. в оптимальной системе равные приращения параметров  $q$  вызывают равные приращения величины  $Q$ .

Применительно к рассматриваемой задаче оптимизации живучести рамно-стержневых систем реализация принципа эквиградиентности заключается в том, что на основании проведенных предварительных (не оптимизационных) расчетов всех элементов системы, исходящих из определенного уровня надежности того или иного элемента, определяются геометрические размеры сечений и расход материала (стоимость). Затем, используя зависимости (5) и (6), находится суммарное значение начальных стоимостей  $i$ -ых элементов:

$$Q_0 = \sum_{i=1}^n q_{0i} = \text{const}, \quad (7)$$

где  $q_{0i}$  – начальный объем расчетной арматуры на единицу длины этого элемента или ее стоимость.

Решение намеченной оптимизационной задачи предусматривает перераспределение величин  $q_{0i}$  между элементами, обеспечивающее при выполнении условия (7) достижение значением  $P_{s0}$  максимально возможного значения вероятности неразрушения всей системы  $P_s$ , где значениям  $P_{si}$  соответствуют величины  $q_i$ :

$$P_s = \prod_{i=1}^n P_{si}, \quad (8)$$

где  $P_{si}$  – конечная надежность  $i$ -го конструктивного элемента ( $i = \overline{1, n}$ ), найденная в результате оптимизационного расчета;  $q_i$  – конечная стоимость  $i$ -го конструктивного элемента, найденная в результате оптимизационного решения;  $P_{s0i}$  – начальная надежность  $i$ -го конструктивного элемента ( $i = \overline{1, n}$ ), найденная при предварительном расчете, т.е. вероятность образования простейшей схемы излома.

Зависимость вероятности неразрушения  $i$ -го пролета  $P_{si}$  от  $q_i$  для систем из  $n$  последовательно соединенных элементов может быть представлена в форме:

$$P_{si} = 1 - a_i \left( \frac{q_i}{q_{0i}} \right), \quad (9)$$

Решение задачи согласно принципа эквиградиентности сводится к определению условного экстремума функции при условии (9) и ограничении (7).

В качестве критериев живучести в рассматриваемом примере расчета живучести железобетонной рамы при определении оптимизационных параметров системы приняты:

1. места возможного появления пластических шарниров;
2. значения предельной величины нагрузки, действующей в местах разрушения системы.

На основании полученных на первом этапе расчета значений параметра  $\lambda$  определим живучесть рамы для трех значений этого параметра:  $\lambda=1$ ,  $\lambda=1,47$ ,  $\lambda=1,71$ . Нагрузка, прикладываемая в обозначенных точках элементов системы, соответственно равна:  $P = 2,4 \cdot \lambda = 2,4 \cdot 1 = 2,4 \text{ кН}$ ;

$P = 2,4 \cdot \lambda = 2,4 \cdot 1,47 = 3,528 \text{ кН}$ ;  $P = 2,4 \cdot \lambda = 2,4 \cdot 1,71 = 4,1 \text{ кН}$ . Т.к. схема рамы и приложенная нагрузка являются симметричными относительно центральной стойки, то пример расчета живучести конструкции выполнен для одной симметричной части [8].

Расчет стоек в сечениях  $c_1$  и  $c_{10}$  показал, что их живучесть равна  $P_s = 0,999999998 = 1$ . Расчет живучести ригеля для трех значений параметрической нагрузки приведен на рисунке 4, а результаты расчета сведены в таблицу 1.

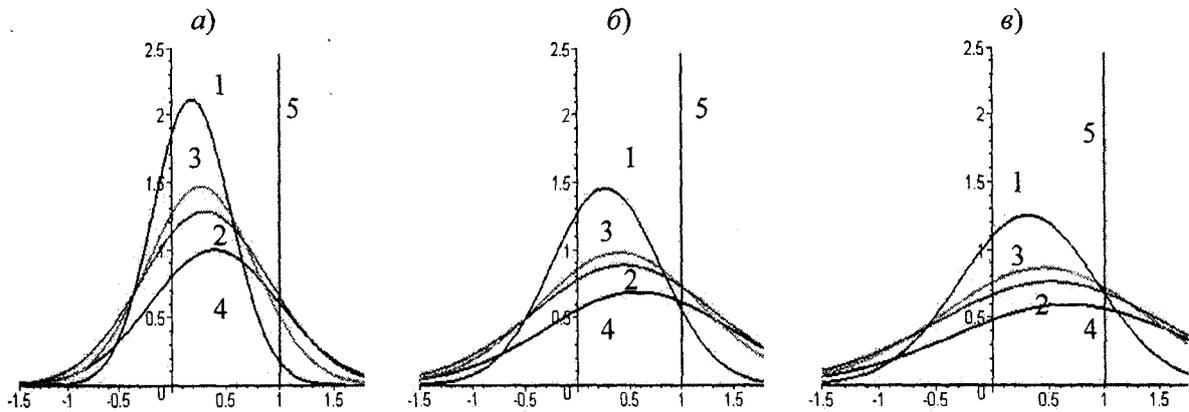


Рис. 4. К оценке живучести ригеля при нагрузках  $P=2,4 \text{ кН}$  (а),  $P=3,528 \text{ кН}$  (б),  $P=4,1 \text{ кН}$  (в): 1, 2, 3, 4 – соответственно вероятность неразрушения в сечении  $c_1, c_2, c_3, c_4$ ; 5 – несущая способность

По результатам, приведенным в таблице 1 и рисунке 5, проведена сравнительная оценка живучести рамы для различных сечений при изменении уровней нагружения.

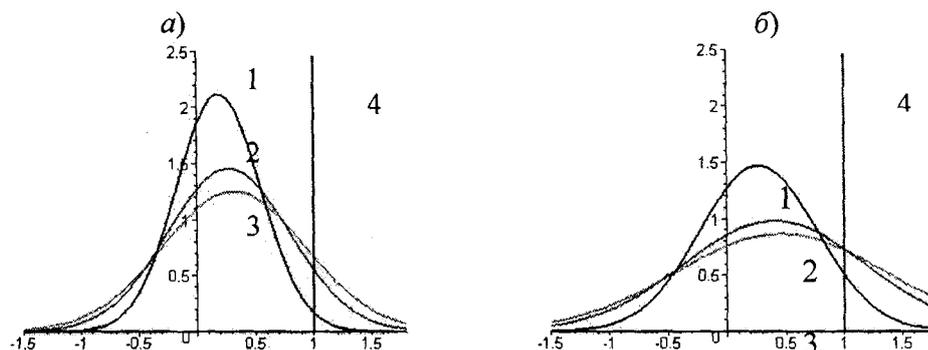
Таблица 1

Вероятность неразрушения сечений и живучесть ригеля

	Сечение $c_2$	Сечение $c_3$	Сечение $c_4$	Сечение $c_5$	Живучесть ригеля
$P=2,4 \text{ кН}$					
Вероятность неразрушения	0,999999983	0,99789	0,99982	0,99319	0,99092
$P=3,528 \text{ кН}$					
Вероятность неразрушения	0,99965	0,93863	0,96982	0,87995	0,80075
$P=4,1 \text{ кН}$					
Вероятность неразрушения	0,99683	0,87504	0,92486	0,78501	0,63330

При образовании первого пластического шарнира в системе, когда значение приложенной нагрузки достигает предельной, вероятность неразрушения и живучесть элементов системы близка к единице. Но после образования последующих шарниров в системе вероятность неразрушения и живучесть снижаются.

Начало рис. 5



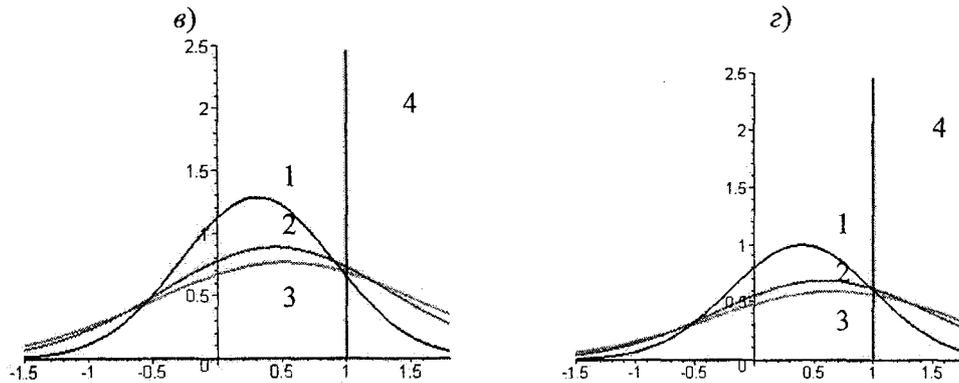


Рис. 5. Сравнительная оценка живучести ригеля в сечении  $c_2$  (а), сечении  $c_3$  (б), сечении  $c_4$  (в), сечении  $c_5$  (з): 1 – для значения нагрузки  $P = 2,4$  кН, 2 – для значения нагрузки  $P = 3,528$  кН, 3 – для значения нагрузки  $P = 4,1$  кН, 4 – несущая способность

В заключение уместно заметить, что при проектировании элементов системы, у которых вероятность неразрушения и живучесть наименьшая, необходимо или изменение конструктивного решения или же принятие решения по усилению определенных отдельных элементов системы с целью обеспечения и повышения надежности и конструктивной безопасности конструктивной системы в целом.

#### Литература

1. Карпенко, Н.И. О концептуальных методологических подходах к обеспечению конструктивной безопасности [Текст] / Н.И. Карпенко, В.И. Колчунов // Строительная механика и расчёт сооружений, 2007. - №1. - С. 4-9.
2. Милейковский, И.Е. Неординарный смешанный метод зависимостей систем с элементами сплошного и составного сечения [Текст] / И.Е. Милейковский, В.И. Колчунов // Известия вузов. Строительство, 1995.- № 7-8. - С. 32-37.
3. Клюева, Н.В. Живучесть железобетонных рам с односторонними связями [Текст] / Н.В. Клюева, Н.Б. Андросова // Известия ОрелГТУ. Серия «Строительство. Транспорт». - 2/14 (530) 2007 апрель-июнь. - С. 50-55.
4. Клюева, Н.В. К анализу живучести внезапно поврежденных рамных систем [Текст] / Н.В. Клюева, В.С. Федоров // Научно-технический журнал «Строительная механика и расчет сооружений». - М: ФГУП НИЦ «Строительство», 2006. - №3. - С. 7-13.
5. Гениев, Г.А. Прочность и деформативность железобетонных конструкций при запроектных воздействиях: Научное издание [Текст] / Г.А. Гениев, Н.В. Клюева, А.И. Никулин, К.П. Пятикрестовский. - М.: АСВ, 2004. - 216 с.
6. Гениев, Г.А. О принципе эквиградиентности и применении его к оптимизационным задачам устойчивости стержневых систем [Текст] / Г.А. Гениев // Строительная механика и расчет сооружений, 1979. - №6. - С. 8-13.
7. Дегтярь, А.Н. Оптимизация живучести конструктивно-нелинейных железобетонных стержневых конструкций в запредельных состояниях [Текст]: Автореф. дис. ... канд. техн. наук - Орел, 2005. - 15 с.
8. Колчунов, В.И. К оптимизации надежности внезапно поврежденных конструктивно нелинейных железобетонных конструкций [Текст] // В.И. Колчунов, А.Н. Дегтярь, Е.В. Осовских / Доклады пятого всероссийского семинара «Проблемы оптимального проектирования сооружений». - Новосибирск, 2005. - С. 181-189.
9. Перельмутер, А.В. Избранные проблемы надежности и безопасности строительных конструкций. Научное издание [Текст] / А.В. Перельмутер. - М.: АСВ, 2007. - 256 с.

УДК 624.074.

Академик РААСН, докт. техн. наук, проф. В.М. Бондаренко;  
 докт. техн. наук, проф. Е.А. Ларионов  
 (Московский институт коммунального хозяйства и строительства)  
 Россия, г. Москва

## К ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ КОНЦЕПЦИИ ТЕОРИИ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА

1. Образование и становление бетона представляет интенсивный неравновесный термодинамический процесс обмена массы и энергии с окружающей средой, в результате которого образуются силовые связи, порождающие его сопротивляемость внешним воздействиям.

Наряду с характеристиками отпорного деформирования основной характеристикой силового сопротивления материала является прочность, определяющая его предельное состояние, до которого он при воздействии внешних сил и окружающей среды может сохранить свою целостность. Достижение этого состояния влечет механическое разрушение элемента конструкции из этого материала.

Разрушение бетона под воздействием возрастающих нагрузок представляет непрерывный процесс изменения его структуры – уплотнения, образования и дальнейшего развития структурных повреждений, приводящих в конечном итоге в некоторый момент времени  $\tau = t_p$  к окончательному разрушению. Фиксация этого физического состояния заключается в распаде бетона на изолированные части.

Еще два этапа этого процесса фиксируются с помощью характерных физических состояний: качество первого из них – начало интенсивного развития микротрещин, а качество второго – начало их неустойчивого развития, объединения в магистральные трещины [1].

На диаграмме деформирования « $F-V$ » ( $F$  – удельные усилия;  $V$  – относительные перемещения) эти три состояния определяют параметрические точки.

Отмеченные физические состояния достигаются в результате работы внешних сил  $F$  на осуществляемых ими деформациях  $V$ .

Например, удельным значениям этих работ при статическом нагружении нормального сечения на диаграмме « $\sigma - \varepsilon$ » отвечают соответственно площади криволинейных треугольников  $0Aa$ ,  $0Bb$ ,  $0Cc$ .

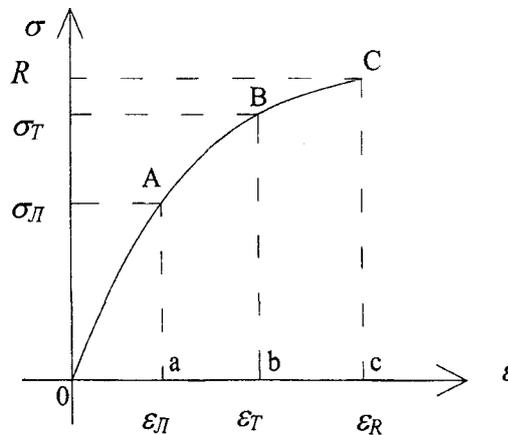


Рис. 1. К интерпретации параметрических точек

2. Рассмотрим процесс разрушения бетона с позиций статистической теории прочности неоднородных материалов, согласно которой он представляется случайным набором зерен, соединенных структурными связями.

Связи рассматриваются не идеально хрупкие, а неравновесно деформируемые с временным модулем деформаций  $E(\tau)$ , условно одинаковым для всех связей.

Работу  $A_i^*(\tau_i)$  внешних усилий, разрушающих (рвущих)  $i$ -ую связь, рассматриваемую как параметр ее энергетического состояния, назовем энергией ее целостности  $W_i(\tau_i)$ .

Известно, что функциональная связь между напряжениями и деформациями у всех реальных материалов, в том числе и бетона, нелинейна [2]. Вместе с тем, запись этой связи, как правило, удовлетворительно аппроксимируется степенными рядами. В связи с этим, используя только линейные части указанных рядов, представим эту связь в виде:

$$\sigma_i(\tau) = E(\tau)\varepsilon_i(\tau), \quad (1)$$

тогда

$$A_i^*(\tau_i) = \frac{[\sigma_i^*(\tau_i)]^2}{2E(\tau_i)}; \quad (2)$$

$$W_i(\tau_i) = \frac{[\sigma_i^*(\tau_i)]^2}{2E(\tau_i)}. \quad (3)$$

Пусть  $W_i(t_0)$  - энергия целостности связи в момент  $\tau = t_0$  начала нагружения сечения (С) - малого элемента конструкции. Ее величина не зависит от режима разрушения связи, а потому

$$W_i(t_0) = \frac{[\sigma_i^*(t_0)]^2}{2E(t_0)} = \frac{[\sigma_i^*(\tau)]^2}{2E(\tau)}. \quad (4)$$

Здесь  $\sigma_i^*(t_0)$  и  $\sigma_i^*(\tau)$  представляют начальное и текущее значения предельного напряжения в  $i$ -ой связи.

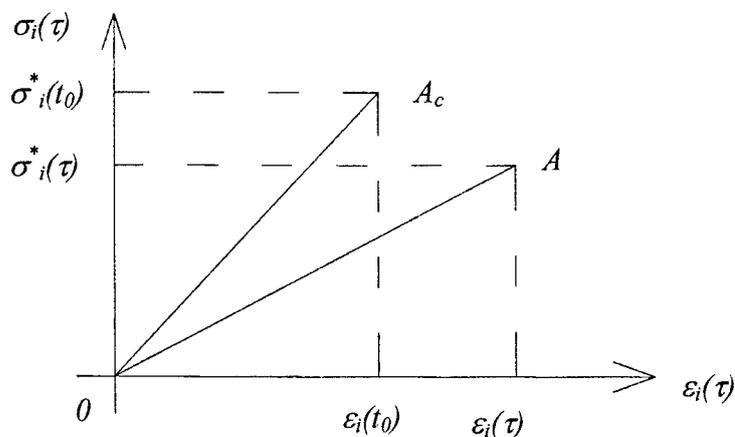


Рис. 2. К иллюстрации инварианта  $W_i(t_0)$

3. Частные значения энергий целостности связей возникают в процессе образования бетона и статистически распределены по сечению (С).

Поскольку процесс формирования связей зависит от многих случайных факторов, то естественным распределением величин  $W_i(\tau)$  и  $\sigma_i^*(\tau)$  является их нормальное распределение.

Возрастающее внешнее нагружение сечения (С) сопровождается процессом разрыва связей, исчерпавших свои энергии целостности – максимальные их энергии сопротивления разрыву.

Предположим, для простоты анализа равномерное распределение внешней нагрузки  $N(\tau)$  по площади  $S_c$  в течение промежутка  $T_p = t_p - t_0$ , где  $\tau = t_p$  - момент разрушения (С).

Тогда равенство:

$$\sigma_i^*(\tau) = \sigma(\tau) \quad (5)$$

есть суть условия разрыва  $i$ -ой связи, где  $\sigma(\tau) = \frac{N(\tau)}{S_c}$ .

Энергия целостности  $W_c(t_0)$  сечения складывается из энергий целостности связей, для которых

$$\sigma_i^*(\tau) \leq \sigma^*(t_p). \quad (6)$$

Здесь  $\sigma^*(t_p)$  есть прочность  $R(t_p)$  бетона при статическом нагружении.

Обозначая  $W_c^g(\tau)$  текущую общую энергию разорванных связей, назовем величину  $\tilde{W}(\tau)$ , определяемую равенством:

$$\tilde{W}(\tau) = W_c(t_0) - W_c^g(\tau), \quad (7)$$

энергетическим резервом целостности сечения (С).

Этот резерв с течением времени уменьшается и исчерпывается при  $\tau = t_p$ , когда  $W_c^g(\tau) = W_c(t_0)$  и сечение (С) разрушается.

Итак, условие

$$\tilde{W}_c(t_p) = 0 \quad (8)$$

является энергетическим критерием разрушения сечения.

Удельные значения этих величин обозначим  $W(t_0)$ ;  $\tilde{W}(\tau)$ ;  $W_g(\tau)$ .

Функция  $W_g(\tau)$  является удельной энергетической мерой силового повреждения сечения при его нагружении.

4. Предполагая, что все связи, удовлетворяющие условию (6), рвутся одновременно в момент  $\tau = t_p$ , приходим к соотношению:

$$W(\tau) = W(t_0), \quad (9)$$

справедливому на промежутке  $T_p$ .

В этом идеальном случае в силу (4) получим энергетическое равенство

$$W(t_0) = \frac{[\sigma^*(t_p)]^2}{2E(t_p)}, \quad (10)$$

возможное лишь при линейном деформировании (С).

Поскольку одновременный разрыв связей предполагает одинаковость всех энергий  $W_i(t_0)$ , а это невозможно из-за их разброса на некотором промежутке, то равенство (10) и, следовательно, линейный характер зависимости удельного внешнего усилия  $\sigma(\tau) = \frac{N(\tau)}{S_c}$  и деформации  $\varepsilon(\tau)$  при

деформировании сечения (С) не имеет места.

Физической причиной их нелинейной зависимости является непрерывный процесс разрыва связей, энергетическая характеристика которого определяется динамикой отношения величины текущей энергии целостности всех неразрушенных связей сечения

$$W_c^0(\tau) = \sum_{(c)} W_i(\tau) \quad (11)$$

к ее значению  $W_c(t_0)$ .

5. Приложенное внешнее удельное усилие  $\sigma(\tau)$  в процессе разрыва части связей сечения непрерывно догружает оставшиеся связи, и возникает увеличение удельного напряжения  $\sigma_c(\tau)$  оставшихся связей, влекущее соответствующее увеличение деформации

$$\varepsilon_i(\tau) = \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)} \quad (12)$$

до величины

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\sigma_c(\tau)}{E(\tau)}. \quad (13)$$

Геометрическая интерпретация соотношений (12) и (13) приведена на рисунке 3.

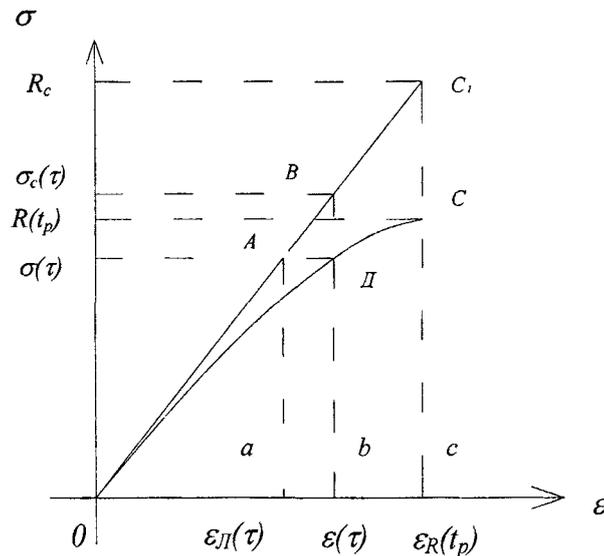


Рис. 3. К эффекту увеличения  $\sigma(\tau)$  и  $\varepsilon_n(\tau)$

Итак, при возрастающем нагружении  $N(\tau)$  сечения (С) увеличение количества разорванных связей, энергетически выражаемой диссипацией  $W_c(t_0)$ , порождает, несмотря на линейное деформирование каждой связи, нелинейную зависимость внешних удельных усилий  $\sigma(\tau) = \frac{N(\tau)}{S_c}$  и порождаемых удельными внутренними усилиями  $\sigma_c(\tau)$  деформаций  $\varepsilon(\tau)$ .

Эта экспериментально наблюдаемая зависимость представляется диаграммой « $\sigma - \varepsilon$ » кратковременного статического нагружения.

Перераспределение усилий  $N(\tau)$  с разрушенных связей на оставшиеся связи в геометрическом аспекте означает выключение из силового сопротивления занимаемой ими площади  $S_c^g(\tau)$ , а потому в процессе силового деформирования участвует лишь площадь  $S_c(\tau) = S_c - S_c^g(\tau)$ .

В результате действительное удельное внутреннее усилие

$$\sigma_c(\tau) = \frac{N(\tau)}{S_c(\tau)} \quad (14)$$

превышает расчетное усилие

$$\sigma(\tau) = \frac{N(\tau)}{S_c} \quad (15)$$

Процесс деформирования сохранившейся для силового сопротивления (работоспособной по терминологии [4]) части сечения является линейным, а сопоставление  $\varepsilon(\tau)$  расчетного усилия  $\sigma(\tau)$  порождает нелинейную функцию напряжений  $S[\sigma(\tau)]$ , учитывающую факт, что деформация  $\varepsilon(\tau)$  порождается на самом деле напряжением  $\sigma_n(\tau)$  и возникает представление  $\varepsilon(\tau)$  в виде:

$$\varepsilon(\tau) = \frac{S[\sigma(\tau)]}{E(\tau)} \quad (16)$$

Из рисунка 3 явствует, что  $\frac{\varepsilon(\tau)}{\varepsilon_n(\tau)} = \frac{\sigma_c(\tau)}{\sigma(\tau)}$ ,

а потому

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\sigma_c(\tau)}{\sigma(\tau)} \cdot \varepsilon_n(\tau) \quad (17)$$

В силу (12) и (17)

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\sigma_c(\tau)}{\sigma(\tau)} \cdot \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)}, \quad (18)$$

а согласно (16) и (18)

$$S[\sigma(\tau)] = S^0[\sigma(\tau), \sigma_c(\tau)] \cdot \sigma(\tau). \quad (19)$$

Таким образом, нелинейная функция напряжений  $S[\sigma(\tau)]$  представляется в виде (19) с множителем аффиноподобия [1]:

$$S^0[\sigma(\tau), \sigma_c(\tau)] = \frac{\sigma_c(\tau)}{\sigma(\tau)}. \quad (20)$$

В силу (16) и (20)

$$\varepsilon(\tau) = \frac{S^0[\sigma(\tau), \sigma_c(\tau)] \cdot \sigma(\tau)}{E(\tau)}. \quad (21)$$

Функция  $S^0$  сопоставляет удельным усилиям  $\sigma(\tau)$  напряжение  $\sigma_c(\tau)$

$$\sigma(\tau) \xrightarrow{S^0} \sigma_c(\tau). \quad (22)$$

6. Неравновесные свойства связей порождают уменьшение  $E(\tau)$  и динамику предельных величин  $\sigma_i^*(\tau)$  и  $\varepsilon_i(\tau)$ , сохраняя при этом энергетическое равенство (4).

Инвариантность энергий целостности  $W_i(t_0)$  от режима разрушения влечет наличие этого свойства у величины  $W_c^0(\tau)$ .

Энергии целостности  $W_c^0(t)$  всех разрушенных к моменту  $\tau = t$  связей отвечает занимаемая ими, не потерявшая способность к силовому сопротивлению, площадь  $S_0(t)$  сечения, а величине  $W_c(t_0)$  - площадь  $S_c$ , а потому:

$$\frac{W_c^0(t)}{W_c(t_0)} = \frac{S_c(t)}{S_c}. \quad (23)$$

В силу (14), (15) и (23)

$$\frac{\sigma_i(t)}{\sigma(t)} = \frac{W_c(t_0)}{W_c^0(t)}. \quad (24)$$

Таким образом,

$$S^0[\sigma(t), \sigma_c(t)] = \frac{W_c(t_0)}{W_c^0(t)}. \quad (25)$$

Величина  $W_c^0(t)$  есть сумма всех энергий целостности связей, для которых предельные напряжения  $\sigma_i^*(t) \geq \sigma(t)$  и, будучи независима от значений  $\sigma(\tau)$  при  $\tau < t$ , инвариантна от режима нагружения.

Поскольку этим свойством естественно обладает и величина  $W_c(t_0)$ , то, согласно (25), функция нелинейности  $S^0$  инвариантна от режима нагружения, и ее значение в момент  $\tau = t$  определяется статистическим распределением прочностей связей и напряжением  $\sigma(t)$ .

В отличие от  $S^0$  текущий модуль деформаций зависит от режима нагружения  $\sigma(\tau)$ , а потому относительная деформация в момент  $\tau = t$  при начале нагружения в момент  $\tau = t_0$  в силу (21) представляется в виде:

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma(t)}{E(t, t_0)} \cdot S^0[\sigma(t), \sigma_c(t)]. \quad (26)$$

Соотношение (26) позволяет разделять нелинейность функцией  $S^0$ , а режимно-наследственное деформирование текущим модулем деформаций  $E(t, t_0)$ .

7. К форме записи

$$\varepsilon(t, t_0) = S^0[\sigma(t)] \cdot \frac{\sigma(t)}{E(t, t_0)} \quad (27)$$

с конкретным текущим модулем деформации

$$E_n^{op}(t, t_0) = \left[ \frac{1}{E_0^m(t)} + C_0^*(t, t) - \int_{t_0}^t \frac{\sigma(\tau) \partial}{\sigma(t) \partial \tau} C_0^*(t, \tau) d\tau \right]^{-1} \quad (28)$$

пришел из других соображений С.В. Бондаренко [3], соответствующим образом заменяя функции нелинейности  $S_m^0[\sigma(t)]$  и  $S_n^0[\sigma(t)]$  мгновенных  $\varepsilon_m(t)$  и запаздывающих  $\varepsilon_n(t, t_0)$  деформаций [5]. Здесь  $E_0^m(t)$  - начальный модуль мгновенных деформаций ко времени  $t$ ;  $C_0^*(t, \tau)$  - начальная мера простой ползучести к моменту времени  $t$  при загрузении в момент  $\tau$ .

Идея С.В. Бондаренко сопоставления деформациям  $\varepsilon_m(t)$  и  $\varepsilon_n(t, t_0)$  единой функции нелинейности  $S^0[\sigma(t)]$  отвечает физическому единству деформации  $\varepsilon(t, t_0)$ , разделенной согласно принятой гипотезе на частные деформации.

Существование такой функции, установленное из физических соображений без соответствующих предпосылок, является развитием его идеи и обоснованием ее в общем случае.

Следует отметить, что функция  $S^0[\sigma(t)]$ , построенная им, обеспечивает в расчетах не менее 97% точности.

Функция  $S^0(t) = \frac{\sigma_c(t)}{\sigma(t)}$  фиксирует силовые повреждения структуры материала инвариантно

от режима его нагружения и энергетического состояния, определяемого локально величинами энергий целостности связей  $W_i(t)$ , а в целом для сечения величиной  $W_c(t)$ .

Энергетические параметры  $W_i(t)$  и  $W_c(t)$ , будучи внутренними характеристиками материала, зависят от несилowych воздействий на него окружающей среды, основными из которых являются коррозионные, температурные и влажностные.

Эти воздействия порождают изменения текущего модуля деформаций и существенно влияют на деформативность и прочность материала, связанные воедино энергетическими параметрами.

8. Представим функцию  $S^0(\tau) = \frac{\sigma_c(\tau)}{\sigma(\tau)}$  в виде:

$$S^0(\tau) = 1 + \eta(\tau), \quad (29)$$

$$\text{где } \eta(\tau) = \frac{\sigma_c(\tau) - \sigma(\tau)}{\sigma(\tau)}. \quad (30)$$

Очевидно, что максимальные значения функций достигаются в момент  $\tau = t_p$  - достижения предельного состояния начала разрушения:

$$\eta = \eta(t_p) = \frac{E(t_p) \varepsilon_R(t_p) - R(t_p)}{R(t_p)}, \quad (31)$$

$$S^0(t_p) = 1 + \eta. \quad (32)$$

Поскольку  $S^0(\tau) = \frac{W_c^0(t_0)}{W_c(t_0)}$  и при  $\tau = t_0$   $W_c^0(t_0) = W_c(t_0)$ , то

$$S^0(0) = 1. \quad (33)$$

При возрастающем нагружении в течение промежутка  $T_p = t_p - t_0$  функция  $S^0(\tau)$  возрастает от 1 до  $1 + \eta$  и в приложениях используются функции

$$S^0[\sigma(t)] = 1 + \eta \left[ \frac{\sigma(t)}{R(t_p)} \right]^m, \quad (34)$$

где  $\eta$  и  $m$  - эмпирические параметры.

9. Физической первопричиной существования энергетических инвариантов силового деформирования является независимость от режима разрушения (разрыва) энергий целостности  $W_i(t_0)$  структурных связей.

Эти инварианты значительно упрощают исследование задач, возникающих при силовом деформировании элементов конструкций.

Например, используя инвариантность функции нелинейности от режима разрушения, устанавливается зависимость:

$$R(t_p, t_0) = \sqrt{\frac{E(t_p, t_0)}{E(t, t_0)}} R(t_0), \quad (35)$$

где  $R(t_0)$  - прочность бетона при кратковременном нагружении;  $R(t_p, t_0)$  - его прочность при длительном нагружении.

В частности, когда  $E(t, t_0)$  имеет вид (28):

$$R(t_p, t_0) = \sqrt{\frac{E_m^0(t_p)}{E_m^0(t_0)}} \cdot \frac{[1 + \varphi(t_0, t_0)]}{[1 + \varphi(t_p, t_0)]} R(t_0), \quad (36)$$

где  $\varphi(t_0, t_0) = E_m^0(t_0) \cdot C_0^*(t_0, t_0)$ ;  $\varphi(t_p, t_0) = E_m^0(t_p) \cdot C_0^*(t_p, t_0)$ .

Одним из факторов деградации несущей способности бетона является понижение его силового сопротивления при температурных воздействиях, в частности при кратковременном нагреве до высоких температур (например, при пожаре).

В работе [4] проведен анализ термосилового сопротивления бетона с позиций структурно-статистического подхода.

Нагревание представляет физико-химический процесс, в течение которого происходит диссипация энергии целостности всех связей  $W_i(t_0)$  и, следовательно, удельной энергии целостности сечения  $W(t_0)$ .

При этом в силу инвариантности  $W(t_0)$  от режима разрушения

$$W(t_0) = W_0(\tau) + W_0^g(\tau), \quad (37)$$

где  $W_0^g(\tau)$  - текущая диссипированная часть энергии  $W(t_0)$ .

Пусть  $E_{i_0}(\tau)$  и  $E_0(\tau)$  - текущие модули деформаций соответственно при высокой и нормальной температуре (обычно полагают ее равной 20°C);  $\sigma_i^*(\tau)$  и  $\sigma_{i_0}^*(\tau)$  - предельные структурные напряжения связей соответственно до и после нагрева.

В силу инвариантности  $W_i(t_0)$  от режима разрушения:

$$W_i(t_0) = \frac{[\sigma_{i_0}^*(\tau)]^2}{2E_{i_0}(\tau)} = \frac{[\sigma_i^*(\tau)]^2}{2E_0(\tau)}, \quad (38)$$

а потому

$$\sigma_{i_0}^*(\tau) = \sqrt{\frac{E_{i_0}(\tau)}{E_0(\tau)}} \cdot \sigma_i^*(\tau). \quad (39)$$

При нагревании модуль деформаций уменьшается и, следовательно, уменьшаются предельные структурные напряжения.

В работе [6] предполагается, что при нагреве бетона, находящегося под нагрузкой  $\sigma(\tau) = \sigma_0$ , происходит снижение его коэффициента упругости  $\nu$ .

Проанализируем эту гипотезу со структурно-энергетических позиций.

Деформация при нагреве нагруженного бетона:

$$\varepsilon_{i_0}(\tau, t_0) = \frac{\sigma_0 S_{i_0}^0(\sigma_0, \tau)}{E_{i_0}(\tau, \sigma_0)}. \quad (40)$$

Значение функции  $S^0$  определяется энергетическим резервом целостности сечения и

$$S_{i_0}^0(\sigma_0, \tau) = 1 + \frac{W_c^0(\tau)}{W_c(\tau)}, \quad (41)$$

где  $W_c(\tau)$  - энергия целостности сечения;  $W_c^0(\tau)$  - общая энергия целостности связей, для которых  $\sigma_i^*(\tau) > \sigma_0$ .

Энергии целостности всех связей в результате температурных повреждений уменьшаются с одинаковым коэффициентом

$$\tilde{\omega}_0(\tau, t_0) = \frac{\varepsilon_0(\tau, t_0)}{\varepsilon_{i_0}(\tau, t_0)}, \quad (42)$$

а потому функция  $S_{i_0}^0(\sigma_0, \tau)$  инвариантна от температуры нагрева  $t^0$  и

$$S_{i_0}^0(\sigma_0, \tau) = S^0(\sigma_0, \tau). \quad (43)$$

В равенстве (42)  $\varepsilon_0(\tau, t_0)$  и  $\varepsilon_{i_0}(\tau, t_0)$  - деформации при нормальной и высокой температуре.

Поскольку

$$S^0(\sigma_0, \tau) = 1 + \frac{1}{\nu_{i_0}(\sigma_0, \tau)}, \quad (44)$$

то

$$\nu_{i_0}(\sigma_0, \tau) = \nu(\sigma_0, \tau), \quad (45)$$

и коэффициент упругости остается постоянным в процессе нагрева бетона.

Таким образом, предпосылка [6] в его снижении в рассматриваемом процессе несостоятельна. Этот факт из других соображений отмечен и в [4].

Заметим, что наряду с существенными выводами, используемая при этом в [4] гипотеза о независимости предельных структурных напряжений  $\sigma_{ic}^*(\tau)$  от температуры в аспекте установленно-го выше равенства (39) порождает сомнения в ее справедливости.

Добавление к структурно-статистическим рассмотрениям вопроса термосилового сопротивления бетона энергетического подхода позволяет более естественное теоретическое обоснование экспериментальных фактов.

Например, отмеченное в опытах [6] отсутствие эффекта повышения деформативности бетона при повторных нагревах под нагрузкой свидетельствует, что он вызван необратимой диссипацией энергии целостности при нагреве, которой соответствует введенный в [4] множитель  $\omega_{i_0}$ , оценивающий температурные повреждения.

Согласно экспериментальным данным, прочность бетона при нагреве под нагрузкой выше, чем при нагружении после нагрева [4]. Пусть  $f[T(\tau)]$  - функция текущих температурных повреждений, влекущая ослабление структурных связей, и тем самым увеличение деформативности нагруженного бетона в процессе его нагрева от температуры  $T(t_0)$  до температуры  $T(t)$ .

Инвариантность функции нелинейности от температуры и независимость удельной энергии целостности  $W(t_0)$  от режима разрушения (с учетом динамики  $f[T(\tau)]$  и  $E(\tau, t_0)$ ) влечет соотношение:

$$R(t) < R(t_0). \quad (46)$$

При нагружении нагретого до температуры  $T(t)$  бетона из-за диссипации энергии целостности  $W(t)$  вследствие увеличения за время нагружения  $t_n = t_1 - t$  у необратимой части деформаций

$$R(t_1) < R(t). \quad (47)$$

Согласно (45) и (46)

$$R(t_1) < R(t_0). \quad (48)$$

Влияние температуры на деформативность материала выражается множителем  $f[T(\tau)]$ , и модуль деформаций  $E[t, t_0, T(t)]$  с учетом температуры выражается в виде:

$$E[t, t_0, T(t)] = f[T(t)] \cdot E(t, t_0). \quad (49)$$

Обоснование записи заключается в том, что мгновенные температурные деформации инвариантны от режима силового нагружения, а множитель  $E(t, t_0)$  отражает режимно наследственный характер деформаций.

Функция температуры  $f[T(t)]$ , предложенная В.М. Бондаренко [2], имеет вид:

$$f[T(t)] = [a - bT(\tau)]^{-1} \quad (50)$$

и отражает уменьшение  $E[t, t_0, T(\tau)]$  в процессе нагрева.

Пусть первый из двух одинаковых образцов бетона нагружается и одновременно нагревается до температуры  $T(t)$ , а второй нагружается уже будучи нагретым в момент  $\tau = t_0$  до этой температуры.

В силу (49) и (50) одинаковая для этих образцов энергия целостности  $W(t_0)$  будет исчерпана при большей деформации у второго образца и, следовательно, меньшей его прочности.

Уравнение термомеханического состояния бетона, согласно (27), (28) и (49), имеет запись:

$$\varepsilon(t, t_0) = f[T(t)] \cdot S^0(\sigma(t), \sigma(t)) \cdot \sigma(t) \left[ \frac{1}{E_0^m(t)} + C_0^*(t, t) - \int_{t_0}^t \frac{\sigma(\tau) \partial}{\sigma(t) \partial \tau} C_0^*(t, \tau) d\tau \right], \quad (51)$$

и в приложениях применимы функции  $S^0$  и  $f[T(t)]$ , задаваемые равенствами (34) и (50).

#### Литература

1. Берг, О.С. Физические основы теории прочности бетона и железобетона [Текст] / О.С. Берг. - М., Стройиздат, 1962. - 96 с.
2. Бондаренко, В.М. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона [Текст] / В.М. Бондаренко. - Харьков. Изд-во Харьковского университета, 1968. - 324 с.
3. Бондаренко, С.В. Инженерные расчеты ползучести строительных конструкций [Текст] / С.В. Бондаренко, О.Б. Тутберидзе. - Тбилиси: «Ганатлеба», 1988. - 588 с.
4. Федоров, В.С. Анализ термосилового сопротивления бетона с позиций структурно-статистического подхода [Текст] / В.С. Федоров, В.Е. Левитский / Известия Орел ГТУ. Строительство. Транспорт. - Орел: ГТУ, 2007. - № 2/14. - С. 138-146.
5. Бондаренко, В.М. Феноменология кинетики повреждений железобетона [Текст] / В.М. Бондаренко. - Ж-л «Бетон и железобетон», 2001. - № 6.
6. Альтшулер, Б.А. Сборные жаростойкие железобетонные конструкции [Текст] / Б.А. Альтшулер. - М.: Стройиздат, 1976. - 128 с.

УДК 624.012

Аспирант С.И. Горностаев; аспирант Е.А. Скобелева  
(Орловский государственный технический университет)  
Россия, г. Орел, тел. 8 (4862) 76-39-92

## МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПАРАМЕТРОВ ДЕФОРМАТИВНОСТИ И ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ СОСТАВНОГО СЕЧЕНИЯ С ПРЕДНАПРЯЖЕННОЙ РАБОЧЕЙ АРМАТУРОЙ

В статье приведено описание методики экспериментальных исследований параметров трещиностойкости и деформативности железобетонных балочных образцов составного поперечного сечения с податливым швом между элементами и напрягаемой арматурой в одном из элементов. Прослежены особенности расстановки электротензорезисторов и механических приборов, рассмотрена принципиальная схема испытательной установки, намечены основные этапы проведения эксперимента и особенности изготовления опытных образцов<sup>\*)</sup>.

В настоящее время весьма актуальным является проведение реконструкции элементов зданий и сооружений. При этом нельзя не отметить важность разработки новых и совершенствования существующих методик расчета усиливаемых конструкций с экспериментальным подтверждением [1]. Продолжая начатые исследования [2], должное внимание было уделено вопросам усиления железобетонных элементов с преднапряженной арматурой. В данной статье предложена методика экспериментальных исследований балочных конструкций составного сечения с податливым швом между элементами и преднапряженной рабочей арматурой в одном из элементов. Такие исследования могут быть полезны для уточнения и совершенствования расчета усиления преднапряженных изгибаемых конструкций за счет учета податливости шва между разными бетонами и оценки влияния предварительного напряжения на их трещиностойкость и деформативность.

В рамках проведения эксперимента образцы с преднапряженной арматурой были представлены как образцы III серии (ПБ-II-1, ПБ-II-2, БН-II-1, БН-II-2) и как образцы IV серии (БСП-II-а, БСП-II-б, БСП-II-в, БСП-II-г). Балочные образцы изготовлены длиной 1250 мм, состоящими по высоте из двух элементов различной прочности, соединенных между собой поперечными арматурными стержнями, входящими в состав арматурного каркаса, причем в нижнем элементе дополнительно расположен отдельный напрягаемый арматурный стержень (рис. 1).

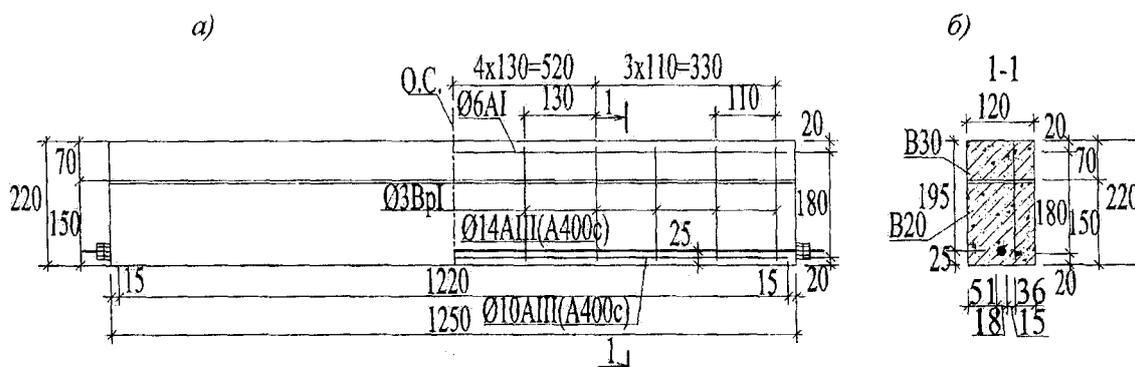


Рис. 1. Конструкции опытных образцов: схема армирования (а) и поперечное сечение (б)

<sup>\*)</sup> - работа выполнена под руководством академика РААСН, д.т.н., проф. В.И. Колчунова.

Верхний элемент образца высотой 70 мм изготовлен из бетона класса В20, нижний брус высотой 150 мм – из бетона класса В30. Геометрические характеристики образцов, полученные по результатам их замера, представлены в [2]. Армирование балок III и IV серий выполнялось с помощью плоского сварного каркаса Кр-1а с продольной растянутой арматурой  $\varnothing 10$  мм класса А-III (А400с), верхней продольной арматурой  $\varnothing 6$  класса А-III (А400с) (см. рис. 1); поперечная арматура запроектирована из арматурных стержней  $\varnothing 3$  мм класса Вр-I с шагом  $100 \div 110$  мм на приопорных участках и с шагом 160 мм в середине пролета. В качестве преднапряженной арматуры принят не входящий в состав каркаса стержень  $\varnothing 14$  класса А-III (А400с).

На приопорных участках балок были предусмотрены монтажные петли, привязанные вязальной проволокой к продольной арматуре каркасов для возможности извлечения конструкций из опалубки и удобства при транспортировании.

Для обеспечения податливости шва между элементами составной железобетонной изгибаемой стержневой конструкции при изготовлении нижний элемент был отделен от верхнего одним слоем низкомодульного материала (одним слоем полиэтиленовой пленки).

Экспериментальные образцы были испытаны в возрасте 5 месяцев. Перед испытаниями были определены прочностные характеристики по кубам и призмам, изготовленным из бетонной смеси, приготовленной для опытных образцов, и замерены геометрические размеры образцов. Для облегчения визуального наблюдения за появлением и развитием трещин боковые поверхности образцов были покрыты известковым раствором.

Экспериментальные образцы были испытаны на гидравлическом прессе с максимальной грузоподъемностью 100 т. Приложение распределенной на участке 200 мм нагрузки в балках этих серий осуществлялось через жесткие металлические пластины (рис. 2). Нагружение образцов для удобства визуального контроля за образованием и развитием трещин производилось снизу. Величина нагружения на каждом этапе фиксировалась с помощью манометра.

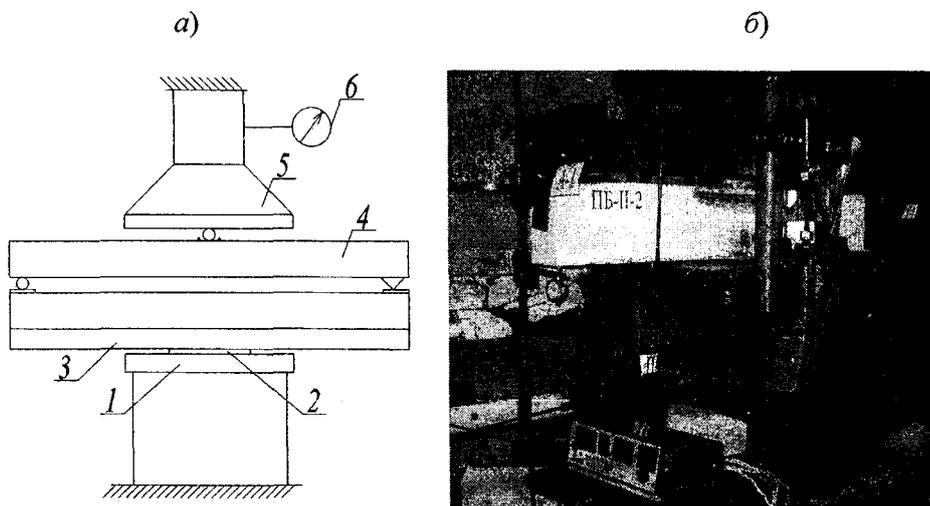


Рис. 2. Схема устройства для испытания (а) и общий вид испытаний (б): 1 – нагружающая платформа прессы; 2 – стальная распределительная пластина; 3 – опытные образцы; 4 – балочная конструкция стенда; 5 – неподвижная платформа прессы; 6 – манометр

В экспериментальных образцах непосредственно до проведения эксперимента было произведено предварительное напряжение рабочей арматуры. Усилие предварительного напряжения создавалось механическим способом с помощью устроенной по концам стержней резьбы, специальных упорных шайб и гаек. Величина предварительного напряжения при испытании образцов определялась по measurable с помощью механических приборов удлинению свободных концов арматурного стержня, для контроля измерения величины предварительного напряжения фиксировалось также число витков шириной 1,75 мм, которые при вращении гайки «выходили» из тела балки. В итоге было достигнуто предварительное напряжение, которое для разных образцов варьировалось в пределах 400–760 МПа.

Для измерения и фиксации перемещений элементов составной железобетонной балки были установлены следующие механические приборы: 6 индикаторов часового типа с ценой деления 0,01 мм по ГОСТ 577-68\* и один прогибомер с ценой деления 0,01 мм, расположенные в середине

или в четверти пролета и на приопорных участках. До начала загрузки два индикатора часового типа были установлены для измерения удлинения арматурного преднапрягаемого стержня (на специальные стеклянные пластины, наклеенные на торцы арматурного стержня).

Величина смещения брусьев балки относительно друг друга замерялась по показаниям индикаторов часового типа, установленных по торцам балки в зоне шва на каждом бруске на специально наклеенных на балку пластинах из стекла. Механические приборы крепились в специальных держателях, расположенных на неподвижных опорах. Для замера деформаций бетона в четырех уровнях по высоте сечения на лицевые боковые поверхности образцов устанавливалось 5-6 терморезисторов с базой 20 мм. При этом для более строгого определения относительных деформаций растянутого бетона тензорезисторы устанавливались как до начала нагружения (для измерения деформаций от обжатия бетона и деформаций, возникающих в бетоне до образования трещин), так и после образования трещин на участках между трещинами. По высоте сечения тензорезисторы устанавливались в растянутой зоне нижнего бруса на берегах нормальных трещин и между ними, в зоне контакта верхнего и нижнего брусьев и в сжатых зонах обоих брусьев. Качественной работе терморезисторов способствовала высокая плотность бетона и тщательная подготовка поверхности перед их установкой. Расстановка механических приборов и тензорезисторов показана на рисунке 3.

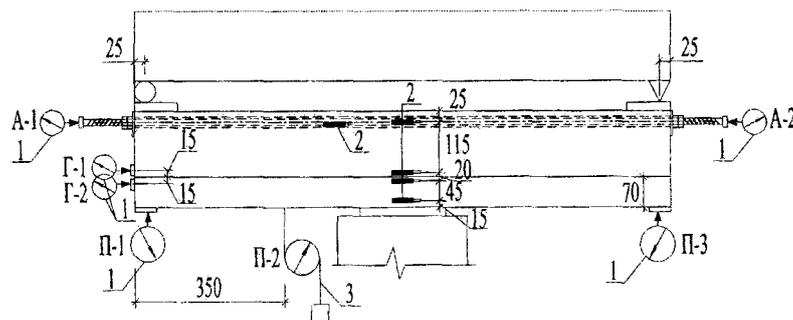


Рис. 3. Схема расстановки механических приборов и тензорезисторов при испытании образцов:  
1 – индикаторы часового типа с ценой деления 0,01 мм; 2 – тензорезисторы с базой 20 мм;  
3 – прогибомер с ценой деления 0,01 мм

Для регистрации показаний тензорезисторов использовался ЦТИ-1 с ценой деления  $1 \times 10^{-6}$ . В процессе испытаний измерялись деформации бетона продольного направления в зонах трещин и между ними на уровне центра тяжести рабочей арматуры, а также деформации бетона перпендикулярно направлению главных сжимающих и растягивающих напряжений в пролете среза каждого бруса.

Образующиеся трещины фиксировались на внешней поверхности образцов с отметками номера ступени нагружения в начале и конце трещины с присвоением данной отметке номера соответствующего этапа. Ширина раскрытия трещин измерялась на каждом этапе нагружения с помощью микроскопа МБП-3 с ценой деления 0,02 мм в уровне центра тяжести продольной растянутой арматуры и на высоте 40 мм от него. Начало образования трещин в элементах балок и расслоение шва сдвига устанавливалось осмотром поверхности образцов с помощью лупы с 28 кратным увеличением, а также используя показания тензорезисторов, установленных в наиболее растянутых зонах бетона.

Расстояния между трещинами нагружения измерялось мерной металлической лентой с ценой деления 1 мм.

Разрушение всех образцов произошло по достижению напряжений в растянутой арматуре предела текучести, о чем свидетельствовала значительная ширина раскрытия нормальных трещин в уровне растянутой арматуры (более 1, 2 мм) и значительные прогибы.

#### Литература

1. Колчунов, В.И. Расчет составных тонкостенных конструкций [Текст] / В.И. Колчунов, Л.А. Панченко. - М.: АСВ, 1999. – 281 с.
2. Колчунов, В.И. Экспериментальные исследования деформирования и трещиностойкости составных конструкций [Текст] / В.И. Колчунов, Е.А. Скобелева, С.И. Горностаев // Известия ОрелГТУ. Серия «Строительство», 2006. – № 9-10. – С. 11-16.

УДК 539.3

Канд. техн. наук В.М. Жгутков

ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

Россия, г. Санкт-Петербург; e-mail: abc\_kitez@mail.ru

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГИХ РЕБРИСТЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ УЧЕТЕ РАЗЛИЧНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

*Разработана математическая модель деформирования пологой ребристой оболочки при учете геометрической и физической нелинейности (пластика, ползучесть), влияния сдвиговой и крутильной жесткостей ребер, их дискретного расположения, ширины, а также поперечных сдвигов. Предлагается единый алгоритм решения задач деформирования и устойчивости оболочек в дважды нелинейной (геометрически и физически нелинейной) постановке.*

**Научную новизну** работы составляет совместный учет геометрической и физической нелинейности, влияния сдвиговой и крутильной жесткостей ребер, их дискретного расположения, ширины, поперечных сдвигов, а также различных свойств материала (упругих, упругопластических и ползучести), что существенно уточняет известные математические модели деформирования оболочек.

**Практическая значимость** данной работы заключается в возможности проведения исследований НДС и устойчивости пологих ребристых оболочек в соответствии с предложенной методикой на основе разработанного математического и программного обеспечения. Результаты указанных исследований могут быть использованы при проектировании высокопрочных оболочечных конструкций в строительстве, машиностроении, авиа- и судостроении.

Рассматривается полая ребристая оболочка прямоугольного плана толщиной  $h$ , закрепленная определенным образом по контуру и находящаяся под действием поперечной нагрузки  $q$ . Оси  $x$  и  $y$  криволинейной ортогональной системы координат направлены вдоль линий кривизны срединной поверхности оболочки (точнее, ее обшивки); ось  $z$  – ортогонально срединной поверхности в сторону ее вогнутости. Со стороны вогнутости оболочка подкреплена перекрестной системой ребер, параллельных координатным линиям.

Математическая модель деформирования оболочки включает в себя:

- геометрические соотношения (связь деформаций и перемещений);
- физические соотношения (связь напряжений и деформаций);
- функционал полной энергии деформации оболочки, из условия стационарности (минимума) которого следуют уравнения равновесия.

Геометрические соотношения в срединной поверхности имеют вид:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} - k_x W + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} - k_y W + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y}, \quad (1)$$

где  $U, V$  и  $W$  – перемещения точек (срединной поверхности) вдоль осей  $x, y$  и  $z$  соответственно;  $k_x = 1/R_1$  и  $k_y = 1/R_2$  – главные кривизны ( $R_1$  и  $R_2$  – главные радиусы кривизны) поверхности оболочки в направлениях осей  $x$  и  $y$ .

В слое, отстоящем на  $z$  от срединной поверхности, с учетом поперечных сдвигов деформации будут иметь вид:

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1; \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2; \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12}, \quad (2)$$

кроме того,

$$\gamma_{xz} = Kf(z) \left( \psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right); \quad \gamma_{yz} = Kf(z) \left( \psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right). \quad (3)$$

$$\text{Здесь } \chi_1 = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \chi_2 = \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad 2\chi_{12} = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}, \quad (4)$$

где  $\psi_x, \psi_y$  – углы поворота отрезка нормали у срединной поверхности оболочки в плоскостях  $Oxz$  и  $Oyz$  соответственно;  $f(z)$  – функция, характеризующая закон распределения напряжений  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  вдоль оси  $z$  [1, 2];  $K$  – коэффициент.

**Физические соотношения** зависят от того, какие свойства материала считаются проявленными (упругие, упругопластические, свойства ползучести).

Для упругих ортотропных оболочек они имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_1}{1 - \mu_1 \mu_2} [\varepsilon_x + \mu_2 \varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu_2 \chi_2)]; \\ \sigma_y &= \frac{E_2}{1 - \mu_1 \mu_2} [\varepsilon_y + \mu_1 \varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu_1 \chi_1)]; \\ \tau_{xy} &= G_{12} [\gamma_{xy} + 2z\chi_{12}]; \quad \tau_{xz} = G_{13} \gamma_{xz}; \quad \tau_{yz} = G_{23} \gamma_{yz}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $E_1, E_2, \mu_1, \mu_2, G_{12}, G_{13}, G_{23}$  – характеристики материала оболочки (зависящие от направления), причем  $E_1 \mu_2 = E_2 \mu_1$ .

Для упругопластических оболочек физические соотношения можно записать в следующем виде (деформационная теория пластичности) [1, 3, 4]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_c}{1 - \mu^2} [\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu \chi_2)]; \\ \sigma_y &= \frac{E_c}{1 - \mu^2} [\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu \chi_1)]; \\ \tau_{xy} &= \frac{E_c}{2(1 + \mu)} (\gamma_{xy} + 2z\chi_{12}); \quad \tau_{xz} = \frac{E_c}{2(1 + \mu)} \gamma_{xz}; \quad \tau_{yz} = \frac{E_c}{2(1 + \mu)} \gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $E_c$  – секущий модуль упругости, равный  $\sigma_i / \varepsilon_i$ , где  $\sigma_i, \varepsilon_i$  – интенсивность напряжений и интенсивность деформаций соответственно. Исходя из опытной кривой « $\sigma - \varepsilon$ » для различных материалов находится своя аппроксимация  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ .

Для некоторых материалов уравнение диаграммы растяжения « $\sigma - \varepsilon$ » удобно записать в форме, предложенной А.А. Ильюшиным:

$$\sigma_i = E \varepsilon_i (1 - \omega),$$

а для некоторых – в форме:

$$\sigma_i = \varepsilon_i (E - t \varepsilon_i^2). \quad (7)$$

Здесь

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_x^z)^2 + (\varepsilon_y^z)^2 + \varepsilon_x^z \varepsilon_y^z + \frac{1}{4} [(\gamma_{xy}^z)^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2]}. \quad (8)$$

Если в некоторой точке оболочки происходит уменьшение интенсивности деформаций, то соотношения (6) должны быть заменены упругими соотношениями, относящимися к разгрузке.

При длительной постоянной нагрузке в материале оболочки может проявиться свойство ползучести (рост деформаций при неизменной нагрузке). Исходя из линейной теории наследственной ползучести (применимой для таких материалов, как старый бетон, пластики) физические соотношения в этом случае могут быть записаны в виде [3, 4, 5].

$$\sigma_x = \frac{E_1}{1 - \mu_1 \mu_2} [\varepsilon_x^z + \mu_2 \varepsilon_y^z - \int_{t_0}^t (\varepsilon_x^z + \mu_2 \varepsilon_y^z) R_1(t, \tau) d\tau];$$

$$\sigma_y = \frac{E_2}{1 - \mu_1 \mu_2} [\varepsilon_y^z + \mu_1 \varepsilon_x^z - \int_{t_0}^t (\varepsilon_y^z + \mu_1 \varepsilon_x^z) R_1(t, \tau) d\tau]; \quad (9)$$

$$\tau_{xy} = G_{12} [\gamma_{xy}^z - \int_{t_0}^t \gamma_{xy}^z R_2(t, \tau) d\tau];$$

$$\tau_{xz} = G_{13} [\gamma_{xz} - \int_{t_0}^t \gamma_{xz} R_2(t, \tau) d\tau]; \quad \tau_{yz} = G_{23} [\gamma_{yz} - \int_{t_0}^t \gamma_{yz} R_2(t, \tau) d\tau].$$

Здесь  $R_1(t, \tau)$  и  $R_2(t, \tau)$  – функции влияния (ядра релаксации) материала соответственно при растяжении (сжатии) и сдвиге. Эти функции находятся опытным путем на основе кривой ползучести данного материала.

Функционал полной энергии деформации оболочки при статической нагрузке (функционал Лагранжа) в общем случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + 2M_{xy} \chi_{12} + \\ & + Q_x \left( \psi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + Q_y \left( \psi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right)] dx dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Усилия, моменты и поперечные силы находятся путем интегрирования соответствующих напряжений (5), (6), (9) по  $z$  в пределах от  $-h/2$  до  $h/2 + H$ , где  $H(x, y)$  – функция, характеризующая высоту и место расположения ребер (равна нулю всюду, кроме мест расстановки ребер по оболочке);  $a$  и  $b$  – размеры оболочки вдоль осей  $x$  и  $y$ .

Для решения геометрически и физически нелинейных задач предлагается единый алгоритм, состоящий из последовательного применения нескольких методов.

1. К функционалу (10), записанному в безразмерных параметрах, применяется метод Ритца при аппроксимации неизвестных функций  $\bar{U}(\xi, \eta, t)$ ,  $\bar{V}(\xi, \eta, t)$ ,  $\bar{W}(\xi, \eta, t)$ ,  $\bar{\Psi}_x(\xi, \eta, t)$ ,  $\bar{\Psi}_y(\xi, \eta, t)$  в виде:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \sum_{I=1}^N U(I) X1(I) Y1(I); \quad \bar{V} = \sum_{I=1}^N V(I) X2(I) Y2(I); \\ \bar{W} &= \sum_{I=1}^N W(I) X3(I) Y3(I); \\ \bar{\Psi}_x &= \sum_{I=1}^N P_x(I) X4(I) Y4(I); \quad \bar{\Psi}_y = \sum_{I=1}^N P_y(I) X5(I) Y5(I). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \bar{U} = \frac{a^2 U}{h}, \quad \bar{V} = \frac{b^2 V}{h}, \quad \bar{W} = \frac{W}{h}, \quad \bar{\Psi}_x = \frac{a \Psi_x}{h}, \quad \bar{\Psi}_y = \frac{b \Psi_y}{h}, \quad \bar{P} = \frac{a^4 q}{E h^4},$$

где  $U(I) - P_x(I)$  – неизвестные числовые параметры для упругих и упругопластических задач и функции переменной  $t$  (времени) для задач ползучести;  $X1(I) - X5(I)$  – известные аппроксимирующие функции переменной  $\xi$ , удовлетворяющие заданным краевым условиям при  $\xi = 0$ ,  $\xi = 1$ ;  $Y1(I) - Y5(I)$  – известные аппроксимирующие функции переменной  $\eta$ , отвечающие заданным краевым условиям при  $\eta = 0$ ,  $\eta = 1$ .

В результате получаем систему нелинейных алгебраических уравнений для упругих и упругопластических задач и систему нелинейных интегро-алгебраических уравнений для задач ползучести, которую кратко можно записать в виде:

$$F_n(X) + f \cdot \bar{P} = -F_n(X) + F_n(X) + F_c(X). \quad (12)$$

Здесь  $X = [U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I)]^T$  – вектор неизвестных параметров в методе Рунге;  
 $F_L(X)$ ,  $F_N(X)$  – линейная и, соответственно, нелинейная части системы, соответствующие упру-  
гой задаче;  $F_{\Pi}(X)$  – нелинейная часть системы, соответствующая членам, учитывающим упруго-  
пластическую составляющую;  $F_C(X)$  – часть системы, содержащая интегральные члены, описы-  
вающие развитие ползучести в материале.

2. Для решения нелинейной системы (12) применяется итерационный процесс (аналог метода упругих решений А.А. Ильюшина).

Для решения нелинейной упругой задачи решается итерационная задача при определенном значении безразмерного параметра нагрузки  $\bar{P}_1$ :

$$F_L(X_i) + f \cdot \bar{P} = -F_N(X_{i-1}). \quad (13)$$

После того как при заданном значении  $\bar{P}_1$  найдено решение упругой задачи, оно принимается за начальное приближение для упругопластических задач и задач ползучести. Далее, для упругопластических задач и задач ползучести решаются соответствующие итерационные задачи:

$$F_L(X_i) + f \cdot \bar{P} = -F_N(X_{i-1}) + F_{\Pi}(X_{i-1}); \quad (14)$$

$$F_L(X_i) + f \cdot \bar{P} = -F_N(X_{i-1}) + F_C(X_{i-1}). \quad (15)$$

Предлагаемый единый алгоритм позволяет с учетом геометрической нелинейности решать задачи деформирования и устойчивости оболочек, испытывающих упругие и упругопластические деформации, а также деформации ползучести.

В соответствии с предлагаемым алгоритмом разработан программный комплекс для ЭВМ, позволяющий получать решения ряда задач, возникающих в практике проектирования оболочечных конструкций на основе уточненных математических моделей.

#### Литература

1. Вольмир, А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек [Текст] / А.С. Вольмир. - М.: Наука, 1972. - 432 с.
2. Карпов, В.В. Математическое моделирование, алгоритмы исследования модели, вычислительный эксперимент в теории оболочек [Текст]: Учебное пособие / В.В. Карпов. - СПбГАСУ. СПб, 2006. - 330 с.
3. Безухов, Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст] / Н.И. Безухов. - М.: Высшая школа, 1968. - 512 с.
4. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст] / Н.Н. Малинин - М.: Машиностроение, 1968. - 400 с.
5. Климанов, В.И. Нелинейные задачи подкрепленных оболочек [Текст] / В.И. Климанов, С.А. Тимашев. - УНЦ АН СССР. - Свердловск, 1985. - 291 с.

УДК 539.3

*Канд. техн. наук, доц. М.А. Ковырягин**(Энгельский технологический институт (филиал) Саратовского государственного технического университета)**Россия, г. Энгельс, тел. 8 845 251 08 76; e-mail: mts@forpost.ru*

## **О ВОЗМОЖНОСТИ РЕГУЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЯХ ОПИСАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ**

*Рассматриваются дискретные и континуальные модели элементов конструкций в виде стержней, позволяющие пассивно или активно регулировать напряженно-деформированное состояние и динамическое поведение при экстремальных нагрузках.*

*The discrete and continual models of construction elements as rods are considered. The stress-deformed state and dynamic behavior are controlled under extreme loads in passive and active forms.*

Одной из основных тенденций современного строительства является повышение уровня надежности конструкций. Это требование заставляет проектировщиков разрабатывать конструкции с учетом реальных, в том числе запредельных воздействий, появление которых возможно в течение всего срока службы конструкции. Особенно жестко такие требования выполняются применительно к дорогостоящим ответственным сооружениям, имеющим реальное воплощение в виде высотных зданий, антенн, дымовых труб, висячих и вантовых мостов. К настоящему времени построено и планируется построить значительное количество этих сооружений. В виду значительной материалоемкости таких сооружений в последнее время активно начинает развиваться направление, связанное с проектированием более экономичных конструкций, но способных противостоять экстремальным воздействиям за счет дополнительно введенных элементов, пассивно или активно противодействующих опасному росту напряжений, деформаций при статическом и динамическом нагружении.

Для того чтобы отслеживать появление опасных ситуаций на существующих сооружениях разрабатываются и применяются различные системы активного мониторинга, позволяющие управлять поведением конструкций. Весьма важной частью такого мониторинга являются модели и методы расчетного анализа динамического отклика на различные воздействия, в том числе сейсмические, как природного, так и техногенного характера. Моделирование поведения этих конструкций требует широкого применения компьютерных технологий. С целью недопущения резонансных явлений возникает необходимость управления колебательными процессами в конструкциях [1-4]. Наибольшее распространение получили дискретная и континуальная модели, описывающие реальные элементы в первом случае набором элементарных по геометрическому виду составляющих, взаимодействующих друг с другом, а во втором, всему исследуемому объекту ставится в соответствие математический образ в виде дифференциального уравнения.

Все известные в настоящее время стандартные программные комплексы используют первую дискретную модель, основанную на методе конечного элемента. Наиболее применяемыми в настоящее время в проектных организациях программными комплексами такого рода являются [5]:

1. COSMOS M 2.7, содержащий следующие разделы:
  - а) Библиотека конечных элементов;
  - б) Расчет напряженно-деформированного состояния конструкции;
  - в) Анализ линейной статики. Учет начальных несовершенств;
  - г) Расчет собственных колебаний. Нелинейный расчет на устойчивость;

- д) Расчет композитных материалов;
- е) Оптимизация в отношении целевой функции;
- ж) Моделирование переноса тепла;
- з) Расчет землетрясений. Учет демпфирования при колебаниях.

2. ЛИРА, МОНОМАХ (НИИАС, Украина) – расчет пространственных шарнирно-стержневых систем с учетом геометрической и физической нелинейности.

3. ПРИНС (Россия) - расчет подкрепленных конструкций с учетом геометрической и физической нелинейности.

4. FEM models (США) – расчеты пространственных стержневых систем.

5. ANSYS (США) – расчеты НДС, а также форм и частот собственных колебаний методом конечных элементов конструкций машиностроения.

Все перечисленные программные продукты оценивают напряженно-деформированное состояние конструкций, но только в двух из них возможен расчет собственных колебаний. Управление динамическим поведением с использованием этих программ носит традиционный характер в виде перебора различных конструкторских решений и оптимизации для заданной нагрузки.

Динамическая реакция сооружения на различные возмущения, например, в виде импульсного воздействия, периодической нагрузки различной природы и других, может быть оценена с использованием библиотеки программ MATLAB различных версий.

Разработка систем регулирования динамического поведения на предмет жизнестойкости сооружений при действии экстремальных нагрузок требует полной информации как о собственной главной частоте или частотном спектре, так и динамической реакции конструкции на наиболее опасные реальные возмущения. Таким образом, возникает иллюзия возможности построения систем регулирования напряженно-деформированным состоянием и динамическим поведением с использованием имеющихся стандартных программных комплексов. Однако на практике дело ограничивается подбором коэффициентов демпфирования при пассивном способе регулирования динамического поведения за счет установки прокладок или динамических гасителей колебаний с затуханием [6] (монумент на Поклонной горе; башни в Алма-Ате, Самаре, п. Эммаус, Березняках, Обухове, Рязани; трубы в Комсомольске на Амуре, Рязани, Красноярске, ГРЭС-24, РТС «Курьяново»; шпиль высотного здания в Москве; мосты в Сургуте, Японии, США).

Активное регулирование колебательных процессов в рассматриваемых конструкциях технически возможно как с помощью гидроприводов, так и сервомеханизмов [7]. При этом для синтеза регулятора используется аппарат теории автоматического регулирования. Объект регулирования в этом случае представляется совокупностью стержней, сложным образом соединенных между собой. Уравнения движения регулируемых стержней имеют вид дифференциальных уравнений второго порядка относительно вектора перемещения конструкции в фиксированном сечении. Результаты данного подхода в реализации к конкретным конструкциям нам неизвестны.

Рассмотрим континуальную модель высотной конструкции, описываемую дифференциальным уравнением следующего вида [2]:

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} = p(y)F(t). \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  - плотность материала;  $A$  – площадь поперечного сечения конструкции;  $E$  - модуль Юнга;  $I$  - момент инерции;  $v$  - боковое смещение,  $p(y)F(t)$  - нагрузка.

Алгоритм численного интегрирования по разностной схеме с представлением производных в виде:

$$\left. \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} \right|_i = \frac{v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2}}{h^4}, \quad \left. \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right|_j = \frac{v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}}{h_t^2} \text{ и начальными условиями } v|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = 1$$

дал возможность получить следующие результаты динамического отклика на кратковременное воздействие ветра (рис. 1, а):

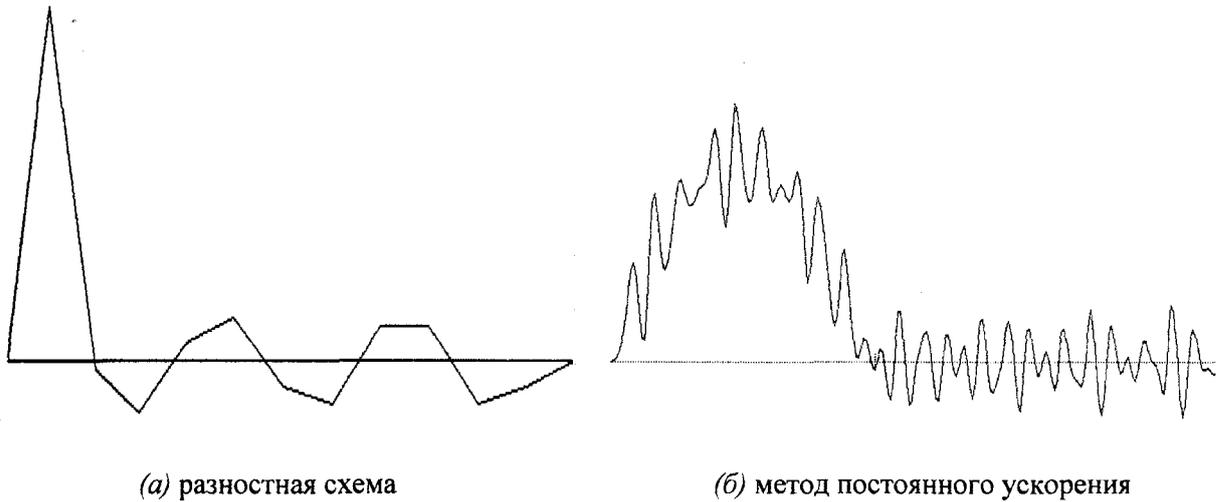


Рис. 1. Колебания верхнего конца стержня при порыве ветра

Естественно, что при другом воздействии амплитуда и частота динамического отклика будет другой. Важно понимать, что такой подход дает возможность получать реальные характеристики колебательного процесса при использовании континуальной модели.

Недостатком описанного подхода является невозможность использования аппарата теории автоматического управления к синтезу регулятора при активном способе регулирования, поскольку требования, предъявляемые к модели в этой теории, нереализуемы - уравнение вида (1) невозможно привести к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Эта принципиальная трудность, которая заставляет отказаться от применения континуальной модели.

Как следует из представленного выше обзора, стандартные пакеты программ на основе метода конечного элемента не дают возможности реализовать синтез регулятора оптимального управления. Поэтому предлагается использовать в качестве модели набор масс, аппроксимирующих отдельные участки конструкции, расположенных на реальном расстоянии друг от друга. На каждую массу действует внешняя нагрузка, воспринимаемая участком и приведенная к главному вектору и главному моменту в точке сосредоточения массы. Кроме того, между массами существует связь по двум параметрам: изгибающему моменту и силе, вызывающей растяжение или сжатие участка. Движение каждой массы подчиняется второму закону Ньютона. Используя формулы равноускоренного движения, получаем перемещения масс по горизонтали. Уравнения движения в форме второго закона Ньютона являются дифференциальными уравнениями второго порядка, приводящимися к системе уравнений первого порядка, допускающими применение методики синтеза оптимального регулятора. На основании описанного алгоритма реализована программа, которая при аналогичных рассмотренных ранее в континуальной схеме параметрах объекта и внешнем воздействии дала результат, изображенный на рисунке 2, б. Данную модель можно назвать методом постоянного ускорения аналогично рассматриваемому в [8] методу, но с иной физической интерпретацией. Преимущества данного подхода видны на примере рисунка 1: дискретная модель дает большее число гармоник колебательного процесса, точнее отображает максимум перемещения. Кроме того, данная модель дает возможность оценить управляемость и наблюдаемость, а также синтезировать оптимальный регулятор.

Рассмотрим модельный пример [4]. Разрешающие уравнения движения  $n$ -ого участка призматического стержня будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^{(n)} &= \frac{1}{m_n} \left[ F^{(n)} + \frac{4\xi^{(n)} [x_2^{(n)} - x_2^{(n-1)}]}{\ell_n^2} - \alpha_n x_1^{(n)} - k_2 x_2^{(n)} + F^{n \text{ управления}} \right]; \\ \dot{x}_2^{(n)} &= x_1^{(n)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь для расчета приняты следующие значения величин:  $x_1, x_2$  - переменные;  $F^{n \text{ управления}}$  - управляющая сила;  $F^{(n)}$  - внешнее возмущающее воздействие, длины участков  $\ell_{(n)} = 5$  м, массы участков

$m_{(n)}=200$  кг, коэффициент демпфирования  $\alpha_n=0,01$ , изгибающий момент (коэффициент связи между элементами)  $\xi_{(n)}=10000$  нм, коэффициент упругости вант  $k_{(n)}=0,1$ ;  $n=1, 2, 3, 4, 5$ .

Матрицы коэффициентов А и В, входящие в уравнения:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3)$$

где А, В – матрицы размерностью соответственно (10x10) и (1x10), а также матрицы q, r имеют вид:

a =

-0.0001	8.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-8.0000	-0.0001	8.0000	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-8.0000	-0.0001	8.0000	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1.0000	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-8.0000	-0.0001	8.0000	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1.0000	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-8.0000	-0.0001	8.0000	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1.0000	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8.0000	-0.0001
0	0	0	0	0	0	0	0	0	8.0000	1.0000
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

b =

0
0.0050
0
0.0050
0
0
0
0
0
0
0

q =

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

r =

1

Результаты расчета коэффициентов оптимального регулятора следующие:

>> [k,p,s]=lqr(a,b,q,r)

k =

1.0e+006 \*

0.3364	1.3452	-0.3360	-1.3395	0.3264	1.2490	-0.2560	-0.8689	0.1024	0.2896
--------	--------	---------	---------	--------	--------	---------	---------	--------	--------

p =

1.0e+011 \*

0.1415	0.5658	-0.1414	-0.5651	0.1395	0.5403	-0.1157	-0.3986	0.0505	0.1427
0.5658	2.2618	-0.5651	-2.2592	0.5576	2.1600	-0.4625	-1.5935	0.2017	0.5705
-0.1414	-0.5651	0.1412	0.5644	-0.1393	-0.5397	0.1156	0.3981	-0.0504	-0.1425
-0.5651	-2.2592	0.5644	2.2565	-0.5570	-2.1575	0.4620	1.5917	-0.2015	-0.5700
0.1395	0.5576	-0.1393	-0.5570	0.1375	0.5327	-0.1141	-0.3932	0.0498	0.1409
0.5403	2.1600	-0.5397	-2.1575	0.5327	2.0638	-0.4423	-1.5245	0.1933	0.5468
-0.1157	-0.4625	0.1156	0.4620	-0.1141	-0.4423	0.0950	0.3277	-0.0417	-0.1180
-0.3986	-1.5935	0.3981	1.5917	-0.3932	-1.5245	0.3277	1.1307	-0.1442	-0.4078
0.0505	0.2017	-0.0504	-0.2015	0.0498	0.1933	-0.0417	-0.1442	0.0185	0.0524
0.1427	0.5705	-0.1425	-0.5700	0.1409	0.5468	-0.1180	-0.4078	0.0524	0.1483

s =

-3.2569 + 0.1264i
-3.2569 - 0.1264i
-3.1247 + 0.3545i
-3.1247 - 0.3545i
-2.8673 + 0.4833i
-2.8673 - 0.4833i
-2.5565 + 0.4286i
-2.5565 - 0.4286i

Ограничения, которым должна удовлетворять задача синтеза, могут быть сформулированы в следующем виде:

1. необходимо удовлетворять задаче наблюдаемости – измерять положение относительно вертикали каждого элемента и его скорость (в программе все необходимые значения брались с предыдущего шага расчета по времени при нулевых начальных условиях);

2. условие управляемости состоит в том, что минимально необходимо прикладывать регулирующие усилия к двум сегментам, т.е. на языке механики управлять динамическим поведением рассматриваемого объекта можно только с помощью момента пары сил.

Результат реализации оптимального регулятора приведен на рисунке 2.

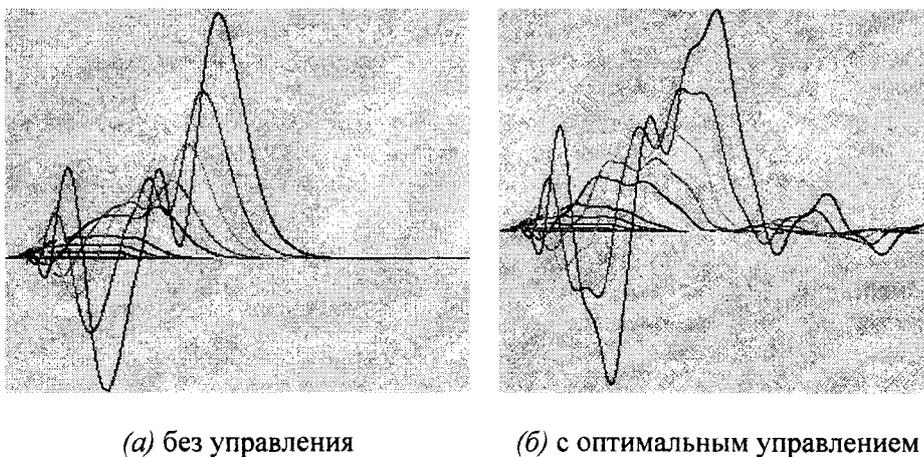


Рис. 2. Колебания стержня при порыве ветра в течение 5 сек.

Анализируя графики на рисунке 2, видим, что амплитуда колебаний уменьшилась, и вид колебательного процесса изменился.

#### Литература

1. Ковырягин, М.А. Регулируемое напряженно-деформируемое состояние двухсвязных пластин с подкрепляющим ребром по некруговому контуру [Текст] / М.А. Ковырягин // VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Пермь 23-29 августа 2001 г.) / УрО РАН: Екатеринбург, 2001. - С. 336.
2. Ковырягин, М.А. Управляемые конструкции (в мостостроении) [Текст] / М.А. Ковырягин, И.Г. Овчинников. - Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2003. - 96 с.
3. Ковырягин, М.А. Регулирование напряженно-деформированного состояния и динамического поведения элементов конструкций [Текст] / М.А. Ковырягин. - Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2006. - 138 с.
4. Ковырягин, М.А. Моделирование и регулирование динамического поведения вертикальных стержневых и оболочечных систем (монография) [Текст] / М.А. Ковырягин, С.В. Никулин. - Энгельсский технол. ин-т (филиал) Саратов. гос. техн. ун-та: Энгельс, 2006. - 184 с. - Деп. в ВИНТИ 19.10.06, №1251-B2006.
5. Никулин, С.В. О возможности управления колебательными процессами механических систем, описываемых уравнениями четвертого порядка [Текст] / С.В. Никулин // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: межвуз. науч. сб. - Саратов. гос. техн. ун-т, 2005. - С. 165-170.
6. Остроумов, Б.В. Увеличение общего демпфирования высотных сооружений при установке на них динамических гасителей колебаний с затуханием [Текст] / Б.В. Остроумов // Монтажные и специальные работы в строительстве, 2005. - № 9. - С. 22-24.
7. Кузина, О.А. Математическая модель и алгоритм оптимального управления системы активного гашения колебаний высотных сооружений [Текст] / О.А. Кузина. - Юж-Рос. гос. техн. ун-т. - Новочеркасск, 1999 - 22 с. - Деп. в ВИНТИ 01.12.1999, № 3562-B99.
8. Зылев, В.Б. Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций [Текст] / В.Б. Зылев. - М.: НИЦ "Инженер", 1999. - 145 с.

УДК 624.04

Докт. техн. наук, проф. В.И. Коробко; аспирант Р.В. Алдушкин  
(Орловский государственный технический университет)  
Россия, г. Орел, тел. 8 (4862)76-39-92; e-mail: ftis\_dec@ostu.ru

## РАЦИОНАЛЬНОЕ УСИЛЕНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ БАЛОК ПОСТАНОВКОЙ ПРЕДНАПРЯЖЕННЫХ ЗАТЯЖЕК

В статье исследуется задача рационального усиления металлических балок путем постановки двух смещенных друг относительно друга предварительно напряженных затяжек, закрепленных на нижнем поясе балки, при различных способах передачи дополнительной нагрузки.

The article describes the task of the optimum amplification of metal beams by prestressing of two ectopic strings which affixed with bottom part in different methods of ancillary load transfer.

Усиление шарнирно опертых по концам металлических балок с помощью постановки предварительно напряженной затяжки является распространенным и достаточно эффективным способом. При его использовании оптимальный подбор параметров усиления осуществляется, как правило, проведением многовариантного расчета. Однако этот процесс можно существенно упростить, решив поставленную задачу аналитически с использованием переменных параметров, влияющих на напряженно-деформированное состояние балок.

Рассмотрим шарнирно опертую по концам балку симметричного поперечного сечения площадью  $A_0$  и длиной  $\ell$ , нагруженную равномерно распределенной нагрузкой  $q_0$  (рис. 1, а). Заданную балку необходимо догрузить дополнительной распределенной нагрузкой  $q_{доп}$ . Для этого балка усиливается постановкой 2-ух пересекающихся предварительно напряженных затяжек, натянутых на жесткие упоры А и А', В и В', расположенных на расстоянии  $c$  от оси балки (рис. 1, б). Требуется подобрать усилие преднапряжения затяжек с целью выравнивания максимальных (по абсолютному значению) напряжений в опасных сечениях балки.

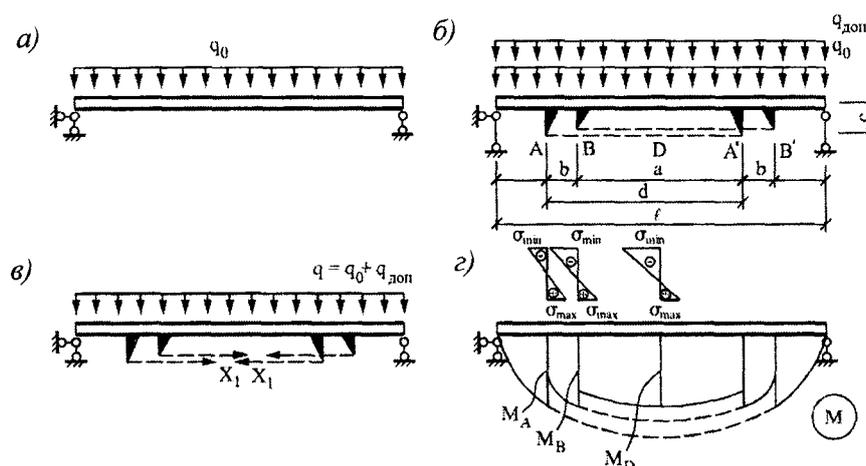


Рис. 1.

На рисунке 1, г представлена эпюра изгибающих моментов  $M$  от равномерно распределенной нагрузки  $q = q_0 + q_{доп}$  и полного усилия в затяжке  $X$ . Выше эпюры  $M$  приведены эпюры нормальных напряжений в опасных сечениях балки.

Выразим изгибающие моменты в опасных сечениях балки через неизвестное усилие  $X$  в затяжке:

- в сечении А  $\{x = \ell - (d - 0,5 \cdot a)\} \quad |M_A| = q \cdot [0,5 \cdot d \cdot (\ell - d)];$
- в сечении В  $\{x = \ell - 0,5 \cdot a\} \quad |M_B| = q \cdot a \cdot [0,25 \cdot \ell - 0,125 \cdot a] - X \cdot c;$
- в сечении D  $\{x = \ell / 2\} \quad |M_D| = 0,125 \cdot q \cdot \ell^2 - 2 \cdot X \cdot c.$

Запишем выражения для экстремальных нормальных напряжений в опасных сечениях усиленной балки с учетом сжимающего усилия в ее средней части:

- в сечении А  $\{x = \ell - (d - 0,5 \cdot a)\}$   $\sigma = \pm q \cdot [0,5 \cdot d \cdot (\ell - d)] / W_6$ ;

- в сечении В  $\{x = \ell - 0,5 \cdot a\}$   $\sigma = \pm (q \cdot a \cdot [0,25 \cdot \ell - 0,125 \cdot a] - X \cdot c) / W_6 - X / A_6$ ;

- в сечении D  $\{x = \ell / 2\}$   $\sigma = \pm (0,125 \cdot q \cdot \ell^2 - 2 \cdot X \cdot c) / W_6 - 2 \cdot X / A_6$ ,

где  $W_6$  – момент сопротивления сечения балки. Приравнявая экстремальные сжимающие напряжения, найдем усилие в затяжке и зависимость  $a - d$ , обеспечивающую это равенство:

$$\begin{cases} -(q \cdot a \cdot [0,25 \cdot \ell - 0,125 \cdot a] - X \cdot c) / W_6 - X / A_6 = -q \cdot [0,5 \cdot d \cdot (\ell - d)] / W_6 ; \\ -(0,125 \cdot q \cdot \ell^2 - 2 \cdot X \cdot c) / W_6 - 2 \cdot X / A_6 = -q \cdot [0,5 \cdot d \cdot (\ell - d)] / W_6 . \\ X = \frac{q \cdot [a \cdot (0,25 \cdot \ell - 0,125 \cdot a) - 0,5 \cdot d \cdot (\ell - d)]}{c - \frac{W_6}{A_6}} ; \\ X = \frac{0,5 \cdot q \cdot [0,125 \cdot \ell^2 - 0,5 \cdot d \cdot (\ell - d)]}{c - \frac{W_6}{A_6}} . \\ \begin{cases} d = 1,208 \cdot \ell - 0,707 \cdot a ; \\ X = \frac{0,5 \cdot q \cdot [0,125 \cdot \ell^2 - 0,5 \cdot d \cdot (\ell - d)]}{c - \frac{W_6}{A_6}} . \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

Полное усилие  $X$  в затяжке складывается из двух составляющих – усилия предварительного напряжения  $X_n$  и усилия самонапряжения  $X_c$ , вызванного равномерно распределенной нагрузкой  $q$  в рассматриваемой статически неопределимой системе:  $X = X_n + X_c$ .

В зависимости от способа усиления балки могут возникнуть два случая:

1) перед усилением балки заданная нагрузка  $q_0$  снимается и уже к усиленной балке прикладывается полная нагрузка  $q = q_0 + q_{дон}$ ;

2) балка усиливается без снятия нагрузки  $q_0$ .

В первом случае усилие самонапряжения в затяжке будет возникать от полной нагрузки  $q$ , а во втором – только от дополнительной нагрузки  $q_{дон}$ .

Найдем усилие самонапряжения, проведя расчет усиленной системы методом сил. Основная система представлена на рисунке 2, а, эпюра изгибающих моментов грузового состояния  $M_p$  – на рисунке 2, б, эпюра единичных моментов  $\bar{M}_1$  – на рисунке 2, в, эпюра нормальных сил единичного состояния  $\bar{N}_1$  – на рисунке 2, г.

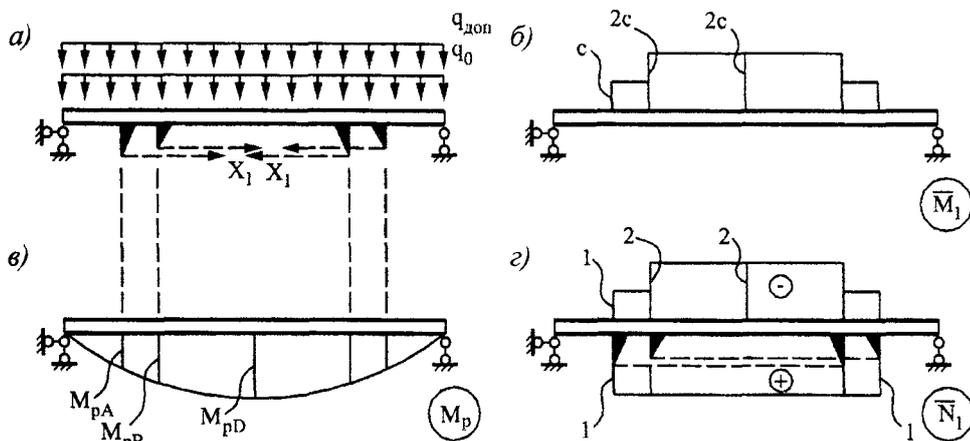


Рис. 2.

Запишем каноническое уравнение метода сил и найдем перемещения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$ :

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{11} = (\delta_{11})_{\bar{M}_1} + (\delta_{11})_{\bar{N}_1} = \frac{2}{E} \left( \frac{c^2 \cdot (a+d)}{I} + \frac{d}{A_3} + \frac{a+d}{A_6} \right); \quad (2)$$

$$(\Delta_{1P})_1 = -\frac{2 \cdot q \cdot c}{EI_6} \left[ (d-a) \cdot (0,25 \cdot \ell \cdot d - 0,125 \cdot d^2) + 0,125 \cdot a \cdot \ell^2 \right]; \quad (3)$$

$$(\Delta_{1P})_2 = -\frac{2 \cdot q_{дон} \cdot c}{EI_6} \left[ (d-a) \cdot (0,25 \cdot \ell \cdot d - 0,125 \cdot d^2) + 0,125 \cdot a \cdot \ell^2 \right], \quad (4)$$

где  $E$  – модуль упругости материала;  $I_6$  – момент инерции сечения балки;  $A_3$  – площадь поперечного сечения затяжки. Здесь  $(\Delta_{1P})_1$  – относится к первому способу усиления балки,  $(\Delta_{1P})_2$  – ко второму. Решая каноническое уравнение, получим:

– для первого случая усиления

$$X_c = \frac{(q_0 + q_{дон}) \cdot c \cdot \left[ (d-a) \cdot (0,25 \cdot \ell \cdot d - 0,125 \cdot d^2) + 0,125 \cdot a \cdot \ell^2 \right]}{c^2 \cdot (a+d) + \frac{d \cdot I_6}{A_3} + \frac{(a+d) \cdot I_6}{A_6}};$$

– для второго случая усиления

$$X_c = \frac{q_{дон} \cdot c \cdot \left[ (d-a) \cdot (0,25 \cdot \ell \cdot d - 0,125 \cdot d^2) + 0,125 \cdot a \cdot \ell^2 \right]}{c^2 \cdot (a+d) + \frac{d \cdot I_6}{A_3} + \frac{(a+d) \cdot I_6}{A_6}}.$$

Найдем усилие предварительного напряжения:

– для первого случая усиления

$$X_n = X - X_c = \frac{0,5 \cdot (q_0 + q_{дон}) \cdot \left[ 0,125 \cdot \ell^2 - 0,5 \cdot d \cdot (\ell - d) \right]}{c - \frac{W_6}{A_6}} - \frac{(q_0 + q_{дон}) \cdot c \cdot \left[ (d-a) \cdot (0,25 \cdot \ell \cdot d - 0,125 \cdot d^2) + 0,125 \cdot a \cdot \ell^2 \right]}{c^2 \cdot (a+d) + \frac{d \cdot I_6}{A_3} + \frac{(a+d) \cdot I_6}{A_6}} =$$

$$= (q_0 + q_{дон}) \cdot \left[ \frac{0,5 \cdot \left[ 0,125 \cdot \ell^2 - 0,5 \cdot d \cdot (\ell - d) \right]}{c - \frac{W_6}{A_6}} - \frac{c \cdot \left[ (d-a) \cdot (0,25 \cdot \ell \cdot d - 0,125 \cdot d^2) + 0,125 \cdot a \cdot \ell^2 \right]}{c^2 \cdot (a+d) + \frac{d \cdot I_6}{A_3} + \frac{(a+d) \cdot I_6}{A_6}} \right]. \quad (5)$$

– для второго случая усиления

$$X_n = X - X_c = \frac{0,5 \cdot (q_0 + q_{дон}) \cdot \left[ 0,125 \cdot \ell^2 - 0,5 \cdot d \cdot (\ell - d) \right]}{c - \frac{W_6}{A_6}} -$$

$$- \frac{q_{дон} \cdot c \cdot \left[ (d-a) \cdot (0,25 \cdot \ell \cdot d - 0,125 \cdot d^2) + 0,125 \cdot a \cdot \ell^2 \right]}{c^2 \cdot (a+d) + \frac{d \cdot I_6}{A_3} + \frac{(a+d) \cdot I_6}{A_6}} =$$

$$= q_0 \cdot \left[ \frac{0,5 \cdot \left[ 0,125 \cdot \ell^2 - 0,5 \cdot d \cdot (\ell - d) \right]}{c - \frac{W_6}{A_6}} \right] + q_{дон} \cdot \left[ \frac{0,5 \cdot \left[ 0,125 \cdot \ell^2 - 0,5 \cdot d \cdot (\ell - d) \right]}{c - \frac{W_6}{A_6}} -$$

$$- \frac{c \cdot \left[ (d-a) \cdot (0,25 \cdot \ell \cdot d - 0,125 \cdot d^2) + 0,125 \cdot a \cdot \ell^2 \right]}{c^2 \cdot (a+d) + \frac{d \cdot I_6}{A_3} + \frac{(a+d) \cdot I_6}{A_6}} \right]. \quad (6)$$

Анализ формул (5) и (6) показывает, что в первом случае усиления балки при всех одинаковых ее геометрических и физических параметрах требуется меньшая величина усилия преднапряжения, чем во втором.

Возможное увеличение нагрузки найдем из двух условий:

- условия равенства экстремальных нормальных напряжений в опасных сечениях усиленной балки и предельного сопротивления стали балки:

$$\sigma_D = \sigma_\delta = R_y; \quad (0,125 \cdot (q_0 + q_{дон}) \cdot \ell^2 - 2 \cdot X \cdot c) / W_\delta - 2 \cdot X / A_\delta = R_y; \\ q_{дон} = \frac{[(R_y - 2 \cdot X / A_\delta) \cdot W_\delta + 2 \cdot X \cdot c]}{0,125 \cdot \ell^2} - q_0; \quad (7)$$

- условия равенства усилия в затяжке и предельного сопротивления стали элемента затяжки:

$$X = \frac{[\sigma_s]}{A_s} = R_s; \quad \frac{0,5 \cdot (q_0 + q_{дон}) \cdot [0,125 \cdot \ell^2 - 0,5 \cdot d \cdot (\ell - d)]}{c - \frac{W_\delta}{A_\delta}} = R_s; \\ q_{дон} = \frac{R_s \cdot \left(c - \frac{W_\delta}{A_\delta}\right)}{0,5 \cdot [0,125 \cdot \ell^2 - 0,5 \cdot d \cdot (\ell - d)]} - q_0. \quad (8)$$

Приравняв выражения (7) и (8), получим величину  $d$ , при которой напряжения в балке  $\sigma_\delta$  и затяжке  $\sigma_s$  близки к своим предельным значениям  $R_y$  и  $[\sigma_s]$  соответственно:

$$d = 0,5 \cdot \ell + 2 \cdot \sqrt{\frac{0,125 \cdot \ell^2 \cdot R_s \cdot (c - W_\delta / A_\delta)}{(R_y - 2 \cdot R_s / A_\delta) \cdot W_\delta + 2 \cdot R_s \cdot c}}$$

Приведем пример практического использования полученных формул для проектирования усиления балки постановкой двух предварительно напряженных затяжек. Рассмотрим балку пролетом  $\ell = 6$  м из двутавра №40 по ГОСТ 8239-89 ( $A_\delta = 72,6$  см<sup>2</sup>,  $W_\delta = 947$  см<sup>3</sup>,  $I_\delta = 18930$  см<sup>4</sup>) с равномерно распределенной нагрузкой  $q = 50$  кН·м. Требуется увеличить нагрузку на 25%, т.е.  $q = q_0 + q_{дон} = 50 + 12,5 = 62,5$  кН·м.

Запроектируем усиление балки постановкой двух предварительно напряженных затяжек. В качестве затяжек примем арматурные стержни класса А500с и расположим их на расстоянии  $c = 30$  см от оси балки.

1. Определение геометрических и жесткостных характеристик затяжек.

1.1 Из условия прочности балки (7) определяем требуемую величину усилия в одной затяжке:

$$R_s = \frac{R_y - 0,125 \cdot q \cdot \ell^2 / W_\delta}{2 \cdot (1/A_\delta - c/W_\delta)} = \frac{24 \cdot 10^4 - 0,125 \cdot 62,5 \cdot 6^2 / (947 \cdot 10^{-6})}{2 \cdot (1/(72,6 \cdot 10^{-4}) - 0,3/(947 \cdot 10^{-6}))} = 159,15 \text{ кН.}$$

1.2 Определяем требуемую площадь поперечного сечения одной затяжки:

$$A_s = \frac{R_s}{[\sigma_s]} = \frac{159,15}{450 \cdot 10^3} = 354 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Принимаем арматурный стержень  $\varnothing 22$  с  $A = 380,1 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>, тогда предельное  $R_s = 171,05$  кН.

1.3 Определяем величины  $a$  и  $d$ :

$$d = 0,5 \cdot \ell + \sqrt{\frac{0,5 \cdot R_s \cdot (c - W_\delta / A_\delta)}{(R_y - 2 \cdot R_s / A_\delta) \cdot W_\delta + 2 \cdot R_s \cdot c}} = \\ = 0,5 \cdot 6 + \sqrt{\frac{0,5 \cdot 171,05 \cdot (0,3 - 947 \cdot 10^{-6} / 72,6 \cdot 10^{-4})}{(24 \cdot 10^4 - 2 \cdot 171,05 / 72,6 \cdot 10^{-4}) \cdot 947 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 171,05 \cdot 0,3}} = 4,353 \text{ м;} \\ a = \frac{1,208 \cdot \ell - d}{0,707} = \frac{1,208 \cdot 6 - 4,353}{0,707} = 4,095 \text{ м.}$$

2. Определение значения  $X_c$ ,  $X_n$ ,  $X$ .

2.1 Для случая усиления со снятием нагрузки:

$$X_c = \frac{(q_0 + q_{дон}) \cdot c \cdot [(d-a) \cdot (0,25 \cdot \ell \cdot d - 0,125 \cdot d^2) + 0,125 \cdot a \cdot \ell^2]}{c^2 \cdot (a+d) + \frac{d \cdot I_6}{A_3} + \frac{(a+d) \cdot I_6}{A_6}} =$$

$$= \frac{(50 + 12,5) \cdot 0,3 \cdot [(4,353 - 4,095) \cdot (0,25 \cdot 6 \cdot 4,353 - 0,125 \cdot 4,353^2) + 0,125 \cdot 4,095 \cdot 6^2]}{0,3^2 \cdot (4,095 + 4,353) + \frac{4,353 \cdot 18930 \cdot 10^{-8}}{380,1 \cdot 10^{-6}} + \frac{(4,095 + 4,353) \cdot 18930 \cdot 10^{-8}}{72,6 \cdot 10^{-6}}} = 116,13 \text{ кН};$$

$$X_n = (q_0 + q_{дон}) \cdot \left[ \frac{0,5 \cdot [0,125 \cdot \ell^2 - 0,5 \cdot d \cdot (\ell - d)]}{c - \frac{W_6}{A_6}} - \frac{c \cdot [(d-a) \cdot (0,25 \cdot \ell \cdot d - 0,125 \cdot d^2) + 0,125 \cdot a \cdot \ell^2]}{c^2 \cdot (a+d) + \frac{d \cdot I_6}{A_3} + \frac{(a+d) \cdot I_6}{A_6}} \right] =$$

$$= \frac{0,3 \cdot [(4,353 - 4,095) \cdot (0,25 \cdot 6 \cdot 4,353 - 0,125 \cdot 4,353^2) + 0,125 \cdot 4,095 \cdot 6^2]}{0,3^2 \cdot (4,095 + 4,353) + \frac{4,353 \cdot 18930 \cdot 10^{-8}}{380,1 \cdot 10^{-6}} + \frac{(4,095 + 4,353) \cdot 18930 \cdot 10^{-8}}{72,6 \cdot 10^{-6}}} = 52,50 \text{ кН};$$

$$X = X_c + X_n = 116,13 + 52,50 = 168,63 \text{ кН.}$$

2.2 Для случая усиления под нагрузкой:

$$X_c = \frac{q_{дон} \cdot c \cdot [(d-a) \cdot (0,25 \cdot \ell \cdot d - 0,125 \cdot d^2) + 0,125 \cdot a \cdot \ell^2]}{c^2 \cdot (a+d) + \frac{d \cdot I_6}{A_3} + \frac{(a+d) \cdot I_6}{A_6}} =$$

$$= \frac{12,5 \cdot 0,3 \cdot [(4,353 - 4,095) \cdot (0,25 \cdot 6 \cdot 4,353 - 0,125 \cdot 4,353^2) + 0,125 \cdot 4,095 \cdot 6^2]}{0,3^2 \cdot (4,095 + 4,353) + \frac{4,353 \cdot 18930 \cdot 10^{-8}}{380,1 \cdot 10^{-6}} + \frac{(4,095 + 4,353) \cdot 18930 \cdot 10^{-8}}{72,6 \cdot 10^{-6}}} = 23,23 \text{ кН};$$

$$X_n = q_0 \cdot \left[ \frac{0,5 \cdot [0,125 \cdot \ell^2 - 0,5 \cdot d \cdot (\ell - d)]}{c - \frac{W_6}{A_6}} \right] + q_{дон} \cdot \left[ \frac{0,5 \cdot [0,125 \cdot \ell^2 - 0,5 \cdot d \cdot (\ell - d)]}{c - \frac{W_6}{A_6}} - \right.$$

$$\left. \frac{c \cdot [(d-a) \cdot (0,25 \cdot \ell \cdot d - 0,125 \cdot d^2) + 0,125 \cdot a \cdot \ell^2]}{c^2 \cdot (a+d) + \frac{d \cdot I_6}{A_3} + \frac{(a+d) \cdot I_6}{A_6}} \right] =$$

$$= 50 \cdot \left[ \frac{0,5 \cdot [0,125 \cdot 6^2 - 0,5 \cdot 4,353 \cdot (6 - 4,353)]}{0,3 - \frac{947 \cdot 10^{-6}}{72,6 \cdot 10^{-4}}} \right] + 12,5 \cdot \left[ \frac{0,5 \cdot [0,125 \cdot 6^2 - 0,5 \cdot 4,353 \cdot (6 - 4,353)]}{0,3 - \frac{947 \cdot 10^{-6}}{72,6 \cdot 10^{-4}}} - \right.$$

$$\left. \frac{0,3 \cdot [(4,353 - 4,095) \cdot (0,25 \cdot 6 \cdot 4,353 - 0,125 \cdot 4,353^2) + 0,125 \cdot 4,095 \cdot 6^2]}{0,3^2 \cdot (4,095 + 4,353) + \frac{4,353 \cdot 18930 \cdot 10^{-8}}{380,1 \cdot 10^{-6}} + \frac{(4,095 + 4,353) \cdot 18930 \cdot 10^{-8}}{72,6 \cdot 10^{-6}}} \right] = 145,4 \text{ кН.}$$

$$X = X_c + X_n = 23,23 + 145,40 = 168,63 \text{ кН.}$$

3. Определение напряжений в затяжке и в балке.

$$\text{Напряжение в затяжке } \sigma_s = \frac{X}{A_s} = \frac{168,63}{380,1 \cdot 10^{-6}} = 444 \text{ МПа} < [\sigma]_s = 450 \text{ МПа.}$$

Напряжение в балке:

– в сечении А

$$\sigma = \pm q \cdot [0,5 \cdot d \cdot (\ell - d)] / W_6 = 62,5 \cdot [0,5 \cdot 4,353 \cdot (6 - 4,353)] / (947 \cdot 10^{-6}) = 237 \text{ МПа} < R_y = 240 \text{ МПа};$$

- в сечении В

$$\sigma = \pm (q \cdot a \cdot [0,25 \cdot \ell^2 - 0,125 \cdot a] - X \cdot c) / W_6 - X / A_6 = \frac{62,5 \cdot 4,095 \cdot (0,25 \cdot 6^2 - 0,125 \cdot 4,095) - 168,63 \cdot 0,3}{947 \cdot 10^{-6}} - 2 \cdot \frac{168,63}{72,6 \cdot 10^{-4}} = 237 \text{ МПа} < R_y = 240 \text{ МПа};$$

- в сечении D  $\sigma = \pm (0,125 \cdot q \cdot \ell^2 - 2 \cdot X \cdot c) / W_6 - 2 \cdot X / A_6 =$

$$= \frac{0,125 \cdot 62,5 \cdot 6^2 - 2 \cdot 168,63 \cdot 0,3}{947 \cdot 10^{-6}} - 2 \cdot \frac{168,63}{72,6 \cdot 10^{-4}} = 237 \text{ МПа} < R_y = 240 \text{ МПа}.$$

Произведем расчет аналогичной балки, усиленной постановкой только одной предварительно напряженной затяжки (рис. 3, а).

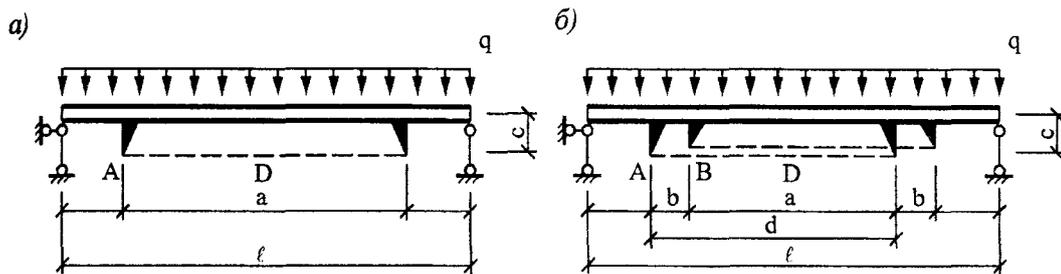


Рис. 3.

1. Определение геометрических и жесткостных характеристик затяжек.

1.1 Из условия прочности балки определяем требуемую величину усилия в одной затяжке:

$$R_s = \frac{0,125 \cdot q \cdot \ell^2 / W_6 - R_y}{c / W_6 - 1 / A_6} = \frac{0,125 \cdot 62,5 \cdot 6^2 / (947 \cdot 10^{-6}) - 24 \cdot 10^4}{0,3 / (947 \cdot 10^{-6}) - 1 / (72,6 \cdot 10^{-4})} = 318,30 \text{ кН}.$$

1.2 Определяем требуемую площадь поперечного сечения затяжки:

$$A_s = \frac{R_s}{[\sigma_s]} = \frac{318,3}{450 \cdot 10^3} = 707 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Принимаем арматурный стержень  $\varnothing 32$  с  $A = 804,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ , тогда предельное  $R_s = 361,94 \text{ кН}$ .

1.3 Определяем величину  $a$ :

$$a = \sqrt{\frac{\ell^2 \cdot R_s \cdot (c - W_6 / A_6)}{(R_y + R_s \cdot c / W_6 - R_s / A_6) \cdot W_6}} = \sqrt{\frac{6^2 \cdot 361,94 \cdot (0,3 - (947 \cdot 10^{-6}) / (72,6 \cdot 10^{-4}))}{(24 \cdot 10^4 + 361,94 \cdot 0,3 / (947 \cdot 10^{-6}) - 361,94 / (72,6 \cdot 10^{-4})) \cdot 947 \cdot 10^{-6}}} = 2,767 \text{ м}.$$

2. Определение значения  $X_c$ ,  $X_n$ ,  $X$ .

2.1 Для случая усиления со снятием нагрузки:

$$X_c = \frac{(q_0 + q_{дон}) \ell^2 \cdot c}{24} \left( 3 - \frac{a^2}{\ell^2} \right) / \left( c^2 + \frac{I_6}{A_6} + \frac{I_6}{A_s} \right) = 223,07 \text{ кН};$$

$$X_n = \frac{(q_0 + q_{дон}) \cdot \ell^2}{8} \cdot \left[ \frac{a^2 / \ell^2}{c - W_6 / A_6} - \frac{c \cdot (1 - a^2 / (3\ell^2))}{c + I_6 / A_6 + I_6 / A_s} \right] = 129,58 \text{ кН};$$

$$X = X_c + X_n = 223,07 + 129,58 = 352,65 \text{ кН}.$$

2.2 Для случая усиления под нагрузкой:

$$X_c = \frac{q_{дон} \cdot \ell^2 \cdot c}{24} \left( 3 - \frac{a^2}{\ell^2} \right) \Big/ \left( c^2 + \frac{I_6}{A_6} + \frac{I_6}{A_3} \right) = 44,62 \text{ кН};$$

$$X_n = \frac{q_0 \cdot \ell^2}{8} \cdot \left[ \frac{a^2 / \ell^2}{c - W_6 / A_6} \right] + \frac{q_{дон} \cdot \ell^2}{8} \cdot \left[ \frac{a^2 / \ell^2}{c - W_6 / A_6} - \frac{c \cdot (1 - a^2 / (3\ell^2))}{c^2 + I_6 / A_6 + I_6 / A_3} \right] = 308,04 \text{ кН};$$

$$X = X_c + X_n = 44,62 + 308,04 = 352,65 \text{ кН}.$$

3. Определение напряжений в затяжке и в балке:

$$\text{Напряжение в затяжке } \sigma_s = \frac{X}{A_3} = \frac{352,65}{804,3 \cdot 10^{-6}} = 439 \text{ МПа} < [\sigma]_s = 450 \text{ МПа}.$$

Напряжение в балке:

$$\text{– в сечении А: } \sigma = \pm \frac{q\ell^2}{8} \left( 1 - \frac{a^2}{\ell^2} \right) \Big/ W_6 = 234 \text{ МПа} < R_y = 240 \text{ МПа};$$

$$\text{– в сечении D: } \sigma = \pm \left( \frac{q\ell^2}{8} - X \cdot c \right) \Big/ W_6 - \frac{X}{A_6} = 234 \text{ МПа} < R_y = 240 \text{ МПа}.$$

Сравним материалоемкость двух типов усиления. Для усиления балки постановкой двух затяжек при данном увеличении нагрузки масса последних (без учета узлов крепления) составляет:

$$m_1 = 2,984 \cdot 2 \cdot 4,353 = 26 \text{ кг}.$$

Для усиления балки постановкой одной затяжки при данном увеличении ее масса (без учета узлов крепления) составляет:

$$m_2 = 6,31 \cdot 2,767 = 17,5 \text{ кг}.$$

Таким образом, данные примеры показывают, что наиболее эффективно усиление балки с предварительным снятием нагрузки постановкой одной затяжки. Однако в тех случаях, когда требуется значительно повысить несущую способность балки, применение двух затяжек позволит снизить трудоемкость выполнения узлов крепления и натяжения последних.

Практическая ценность полученных аналитических решений заключается в возможности проектирования оптимального усиления балок постановкой одной и двух затяжек путем однократного аналитического их расчета. При этом оптимальность полученных решений заключается в минимизации напряжений в сечениях балок одновременно с максимальным использованием несущей способности как усиливаемой балки, так и, собственно, элементов усиления – затяжек, что обуславливает максимальный экономический эффект такого усиления.

#### Литература

1. Коробко, В.И. УНИРС для строителей: Учебное пособие для ВУЗов [Текст] / В.И. Коробко, А.В. Коробко. – М.: АСВ, 1998. – 304 с.
2. Коробко, В.И. Строительная механика стержневых систем [Текст] / В.И. Коробко, А.В. Коробко. – М.: АСВ, 2007. – 510 с.

УДК 624.073

*Докт. техн. наук, проф. В.И. Коробко**(Орловский государственный технический университет)**Россия, г. Орел**Инженер С.А. Морозов**(Центр экспертизы промышленной безопасности ОрелГТУ)**Россия, г. Орел, тел. 8 (4862) 73-15-10; e-mail: morozov\_stas\_57@mail.ru*

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛАСТИНОК СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ, НАХОДЯЩИХСЯ В ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ

*В статье рассматриваются вопросы оптимального проектирования пластинок, находящихся в предельном состоянии. К решению задач применяется изопериметрический метод, с помощью которого получают оценки максимальной высоты и объема оптимально запроектированных пластинок.*

*In article observes the questions of optimum designing slabs, being in a limited condition. To the decision of problems applies isoperimetrical method, by means of which gains estimations of the maximal height and volume optimum project slabs.*

Проблема оптимального проектирования конструкций является одной из наиболее актуальных современных проблем строительной механики. Большинство задач оптимального проектирования пластинок, находящихся в предельном состоянии, решаются численными методами. Аналитические решения получены лишь для частных случаев форм пластинок (круглая, эллиптическая, прямоугольная, треугольная [1]).

Наиболее простым приближенным методом оптимального проектирования пластинок является изопериметрический метод, теоретические основы которого разработаны одним из авторов этой статьи [2]. Этот метод позволяет получать оптимальные решения (в смысле расхода материала) для пластинок произвольной формы, которые представляются в виде изопериметрических неравенств, дающих двустороннюю оценку оптимальной высоте  $H_{opt}$  или оптимальному объему  $V_{opt}$  пластинки. Приведем кратко основные положения и зависимости изопериметрического метода.

Рассмотрим нагруженные равномерно распределенной нагрузкой  $q$  свободно опертые пластинки, материал которых подчиняется условию текучести Треска (рис. 1). Оптимально запроектированная пластинка имеет бесконечное множество линейно-независимых форм разрушения. Поэтому напряженное состояние в точке должно характеризоваться вектором течения, имеющим бесчисленное множество направлений (т.е. представляться вершиной шестиугольника Треска). При этом, очевидно,  $m_x = m_y = m_m$ ,  $m_{xy} = 0$ , где  $m_m$  – предельный погонный момент в шарнирах текучести, и тогда дифференциальное уравнение поперечного изгиба пластинки принимает вид уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 m_m = -q \quad (1)$$

с граничными условиями  $m_m|_L = 0$ .

Закон изменения толщины пластинки получим из эпюры нормальных напряжений в ее сечениях в предельном состоянии (рис. 2):

$$H_{opt}(x, y) = 2\sqrt{m_m / \sigma_m} \quad (2)$$

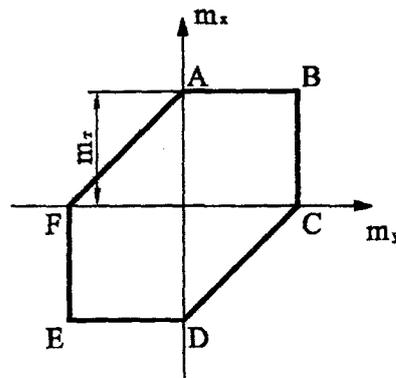


Рис. 1.

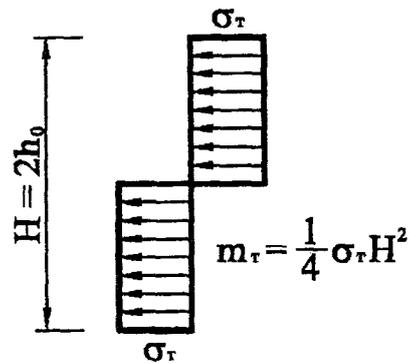


Рис. 2.

С помощью подстановки  $v = 2m_m/q$  уравнение (1) приводится к виду  $\nabla^2 v + 2 = 0$ , которое подробно исследовано в теории упругого кручения призматических брусьев [3]. Используя полученное в этой работе изопериметрическое неравенство

$$2 \int_A v dx dy \geq \frac{A^2}{K_f},$$

с учетом введенной подстановки, запишем:

$$\frac{4}{q} \int_A m_m dx dy \geq \frac{A^2}{K_f}. \quad (3)$$

Здесь  $A$  – площадь пластинки;  $K_f$  – коэффициент формы пластинки, определяемый контурным интегралом

$$K_f = \min \int \frac{ds}{l h},$$

где  $h$  – длина перпендикуляра, опущенного из полюса, взятого внутри области, на касательную к переменной точке контура пластинки. Подробные исследования этой характеристики приведены в работе [4].

Если закон изменения предельного момента в оптимально запроектированной пластинке приближенно представить в виде однопараметрической функции

$$m_m = m_{m_0} [t/r(\varphi)] = m_{m_0} g(\rho),$$

где  $t$  и  $\varphi$  – полярные координаты;  $r = r(\varphi)$  – полярное уравнение контура пластинки;  $m_{m_0}$  – максимальное значение  $m_m$ ;  $\rho$  – безразмерная полярная координата, то из выражения (3) получим:

$$\frac{4}{q} \int_A m_m dx dy = \frac{8m_{m_0}}{q} \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho \geq \frac{A^2}{K_f}.$$

$$\text{Отсюда } m_{m_0} \geq \frac{qA}{8K_f} \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho. \quad (4)$$

Функцию  $g(\rho)$  в этом неравенстве выберем таким образом, чтобы она удовлетворяла граничным условиям  $g(0) = 1$ ,  $g(1) = 0$  и соответствовала известным решениям для задачи упругого кручения призматического бруса [3]:

$$g(\rho) = 1 - \rho^2. \quad (5)$$

После ее подстановки в выражение (4) получим неравенство:

$$m_{m_0} \geq 0,5qA/K_f, \quad (6)$$

которое обращается в равенство для эллиптических пластинок [5, 6]:

$$m_{m0} = \frac{qA}{2K_f} = \frac{q}{2} \frac{\pi ab}{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)} = \frac{q}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Таким образом, действительный пластический момент в любой точке пластинки  $M_m$  и её оптимальная высота  $H_{opt}$  могут быть оценены с помощью изопериметрических неравенств:

$$m_m \geq \frac{qA}{2K_f} (1 - \rho^2); \quad H_{opt} \geq \sqrt{\frac{2qA}{\sigma_m K_f}} (1 - \rho^2). \quad (7)$$

Зная  $H_{opt}$ , можно оценить объем оптимально запроектированной пластинки:

$$V_{opt} = \int_F H_{opt} dF \geq \frac{2F}{3} \sqrt{\frac{2qA}{\sigma_m K_f}}. \quad (8)$$

Объем пластинки постоянного сечения найдем из выражения:

$$V_{пост} \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3qA}{\sigma_m K_f}}. \quad (9)$$

Сравнивая выражения (8) и (9), получим:

$$\frac{V_{пост}}{V_{opt}} \approx \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 1,225.$$

Экономия материала может достигать 22,5% (например, для круглой пластинки, когда неравенства (8) и (9) обращаются в равенства).

На основании изопериметрических свойств величины  $K_f$  [4] легко доказываются изопериметрические теоремы относительно физических и геометрических характеристик оптимально запроектированных пластинок:

– из всех пластинок равной площади круглая имеет наибольшие значения  $m_{\tau 0}$ ,  $H_{opt}$  и  $V_{opt}$ ; бесконечно вытянутые пластинки имеют наименьшие значения  $m_{\tau 0}$ ,  $H_{opt}$  и  $V_{opt}$ ;

– из всех  $n$ -угольных пластинок равной площади пластинка в виде правильного  $n$ -угольника имеет наибольшие значения  $m_{\tau 0}$ ,  $H_{opt}$  и  $V_{opt}$ ;

– при симметризации<sup>1</sup> пластинок произвольного вида увеличиваются (не уменьшаются) значения  $m_{\tau 0}$ ,  $H_{opt}$  и  $V_{opt}$ :

$$m_{\tau 0}^* \geq m_{\tau 0}, \quad H_{opt}^* \geq H_{opt}, \quad V_{opt}^* \geq V_{opt} \quad (10)$$

С учетом неравенств (7), (8) и (9) получим двусторонние оценки физических и геометрических величин, имеющих место при оптимальном проектировании пластинок.

$$\begin{cases} m_{\tau 0}^* \geq m_{\tau 0} \geq qA/(2K_f), \\ H_{opt}^* \geq H_{opt} \geq \sqrt{2qA/(\sigma_m K_f)}, \\ V_{opt}^* \geq V_{opt} \geq 4/\sqrt{3} \cdot qA/(\sigma_m K_f). \end{cases} \quad (11)$$

Здесь звездочка относится к параметрам новой пластинки, полученной после симметризации заданной.

Ввиду ограниченного числа известных решений задач оптимального проектирования не представляется возможным показать графически границы возможного изменения  $m_{\tau 0}$ ,  $H_{opt}$  и  $V_{opt}$ .

Однако при практических расчетах следует иметь в виду, что при равных значениях  $K_f$  точное решение для эллиптических пластинок может служить нижней границей изучаемой величины.

**Оптимальное проектирование пластинок, имеющих ограничения по высоте.** Большинство задач оптимального проектирования решаются при условии получения нулевой толщины на опорном контуре. Однако инженерная практика выдвигает перед конструкторами задачи, когда

<sup>1</sup> Симметризация – это геометрическая операция плоской области, при которой выбирается ось (ось симметризации), расположенная произвольно на ней, и все множество хорд, перпендикулярных этой оси, смещается относительно ее так, что ось симметризации делит эти хорды пополам. В результате в новой полученной таким образом области появляется дополнительная ось симметрии. Подробные сведения об этой операции можно найти в работах [3, 5].

высота пластинки по технологическим или конструкционным соображениям имеет определенные ограничения в пролете и на опорном контуре (рис. 3).

Решим задачу оптимального проектирования шарнирно опертых пластинок, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой, когда её толщина ограничена на опорном контуре ( $H = 2h_{on}$ ) и в центре пластинки ( $H = 2h_0$ ) (см. рис. 3). Разрушающую нагрузку для пластинок переменного сечения можно находить из выражения [5]:

$$P_{разр} = \min \int_A m_\tau \nabla^2 w dA / \int_A w dA. \quad (12)$$

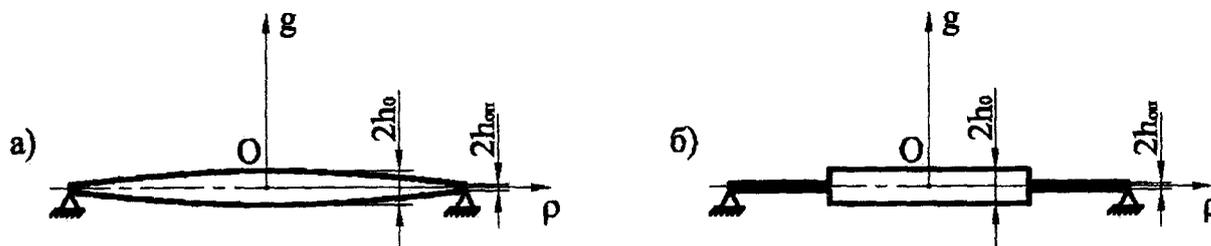


Рис. 3.

Будем предполагать, что оптимально запроектированные пластинки симметричны по высоте относительно срединной поверхности. Пусть закон изменения толщины пластинки приближенно описывается функцией  $H(x, y) = 2h_0 g(\rho)$ , линии уровня которой подобны контуру пластинки и подобно расположены. Если функцию прогибов такой пластинки задать также в виде линий уровня  $w = w_0 g(\rho)$ , то из выражения (12) получим:

$$q_{разр} \leq \frac{K_f}{2A} \cdot \int_0^1 m_{\tau\rho} (g''\rho + g') d\rho / \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho. \quad (13)$$

При оптимальном проектировании пластинок, очевидно, будет иметь место такая схема разрушения, при которой вся пластинка будет находиться в пластическом состоянии, и ее поверхность прогибов будет описываться выражением (5). При этом из (13) получим:

$$q_{разр} \leq \frac{K_f}{A} \sigma_m h_0^2 \int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho. \quad (14)$$

Тогда объем пластинки для рассматриваемого закона изменения толщины получим из выражения:

$$2 \iint_F H(x, y) dA = 2h_0 \int_0^1 \int_0^{2\pi} g t d\varphi = 4Ah_0 \int_0^1 g \rho d\rho. \quad (15)$$

Из физических соображений ясно, что  $g(\rho)$  должна быть функцией невозрастающей, поскольку  $h_{on} \leq h_0 g(\rho) \leq h_0$  (см. рис. 3).

В выражении (14) интеграл  $\int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho$  представляет собой уменьшенный в  $\pi h_0^2$  раз объем тела, образованного вращением кривой  $g(\rho)$  (см. рис. 3, а) вокруг оси  $O\rho$ , т.е.

$$V_\rho = \pi h_0^2 \int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho. \quad (16)$$

В выражении (15) интеграл  $\int_0^1 g \rho d\rho$  представляет собой уменьшенный в  $2\pi h_0$  раз объем тела вращения, образованного вращением кривой  $g(\rho)$  вокруг оси  $Og$ :

$$V_g = 2\pi h_0 \int_0^1 g \rho d\rho. \quad (17)$$

Таким образом, рассматриваемую задачу можно сформулировать так: необходимо определить  $\min V_g$  при  $V_\rho = const$ . Эта задача может быть легко сведена к задаче динамического программирования. При этом искомое решение (см. рис. 3, б) можно представить в виде системы:

$$g(\rho) = \begin{cases} h_0, & 0 \leq \rho \leq \rho_0; \\ h_{on}, & \rho_0 \leq \rho \leq 1, \end{cases} \quad (18)$$

где  $\rho_0 = t/r_0(\varphi)$  – полярное уравнение границы изменения толщины пластинки.

Из выражения (14) имеем:

$$\int_0^1 g^2(\rho) d\rho = \frac{q_{разр} A}{\sigma_\tau h_0^2 K_f}.$$

Подставим значение этого интеграла в выражение (16):

$$V_\rho = q_{разр} \frac{\pi A}{\sigma_\tau K_f}. \quad (19)$$

На основании (18) и рисунка 3, б находим, что:

$$V_\rho = \pi(h_0^2 - h_{on}^2)\rho_0 + \pi h_{on}^2. \quad (20)$$

Приравняв правые части выражений (19) и (20), получим:

$$\rho_0 = \frac{q_{разр} - q_{on}}{q_0 - q_{on}}, \quad (21)$$

$$q_{on} = \frac{K_f}{A} \sigma_m h_{on}^2; \quad q_0 = \frac{K_f}{A} \sigma_m h_0^2.$$

Подставляя эти выражения в выражение (21), получим:

$$\rho_0 = \frac{A/K_f \cdot q_{разр}/m_\tau - 1}{h_0^2/h_{on}^2 - 1}. \quad (22)$$

Если по результатам расчета получилось  $\rho_0 = 0$ , то для восприятия заданной нагрузки достаточно постоянной толщины пластинки  $h_{on}$ ; если  $\rho_0 < 0$ , то следует уменьшить толщину пластинки на опорном контуре; если  $\rho_0 = 1$ , то для восприятия заданной нагрузки необходима постоянная толщина пластинки  $h_0$ ; если  $\rho_0 > 1$ , то следует увеличить либо  $h_{on}$ , либо  $h_0$ . И только когда  $0 < \rho_0 < 1$  получается пластика ступенчато-переменной жесткости.

Таким образом, с помощью изопериметрического метода можно легко получать оценки физических и геометрических параметров оптимально запроектированных пластинок как с плавно меняющейся толщиной, так и ступенчато-переменной жесткости.

#### Литература

1. Эстрин, М.И. К теории оптимального проектирования жестко пластических плит [Текст] / М.И. Эстрин // Новые методы расчета строительных конструкций. – М.: Госстройиздат, 1971. – С. 156-162.
2. Коробко, В.И. Изопериметрический метод оптимального проектирования пластинок, работающих за пределом упругости [Текст] / В.И. Коробко // Строительная механика и расчет сооружений, 1977. – №1. – С. 18-21.
3. Поля, Г. Изопериметрические неравенства в математической физике [Текст] / Г. Поля, Г. Сёге. – М.: Госматиздат, 1962. – 336 с.
4. Коробко, А.В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости [Текст] / А.В. Коробко. – М.: АСВ, 1999. – 302 с.
5. Коробко, В.И. Изопериметрический метод в строительной механике: Теоретические основы изопериметрического метода [Текст] / А.В. Коробко. – М.: АСВ, 1997. – 396 с.
6. Прагер, В. Проектирование пластин наименьшего веса [Текст] / В. Прагер // Механика, 1956. – №6. – С. 108-111.

УДК 624.04

Докт. техн. наук, проф. А.В. Коробко; аспирант А.В. Чукулаев  
(Орловский государственный технический университет)  
Россия, г. Орел, тел. 8 (4862) 41-98-46

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

*В статье рассматривается возможность применения метода интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ) для определения верхней критической нагрузки, соответствующей потере устойчивости сферических оболочек (панелей). Данная задача рассматривается в геометрически линейной постановке, связанной с вычислением первого собственного значения, соответствующего первой собственной форме потери устойчивости.*

Теоретические основы и математический аппарат метода интерполяции по коэффициенту формы разработаны только для двумерных задач теории упругости (в частности, для решения задач технической теории пластинок и задач чистого кручения призматических стержней) [1]. В основе МИКФ лежат изопериметрические свойства геометрической характеристики формы плоской области (коэффициента формы). Попытки использования коэффициента формы области для решения задач теории оболочек предпринимались [2, 3]. В обоих случаях использовался коэффициент формы плоской области, т.е. проекции оболочки на горизонтальную плоскость.

В работе [4] нами, впервые в строительной механике, было предложено использовать для расчета пологих оболочек коэффициент формы, учитывающий их кривизну. Это новое направление в развитии метода интерполяции по коэффициенту формы является весьма перспективным, поскольку существующие методы решения задач теории оболочек (как точные, так и приближенные) являются весьма сложными.

Было выполнено большое количество работ по определению верхней критической нагрузки сферических панелей, однако, полученные значения этой нагрузки колеблются в широких пределах и указывают на сильную зависимость ее от аппроксимации прогибов. Расхождение результатов тщательно поставленных экспериментов с расчетными данными составляет 2,5-27%. Более того, в некоторых работах получены зависимости, показывающие на существование множества равновесных форм с предельными точками и точками разветвления решения. В связи с этим практически невозможно «предугадать», как сферическая оболочка будет терять устойчивость, и симметрична ли будет форма потери устойчивости.

В настоящей статье делается попытка применения МИКФ к нахождению верхней критической нагрузки в задаче устойчивости пологой сферической оболочки без каких либо предположений о форме потери устойчивости.

### **Постановка задачи.**

Требуется определить верхнюю критическую нагрузку для шарнирно опертой пологой сферической оболочки с постоянной гауссовой кривизной  $\Gamma$  и толщиной  $h$  (рис. 1). Оболочка нагружена равномерно распределенной по всей поверхности нагрузкой  $q$  (Па), действующей со стороны выпуклости.

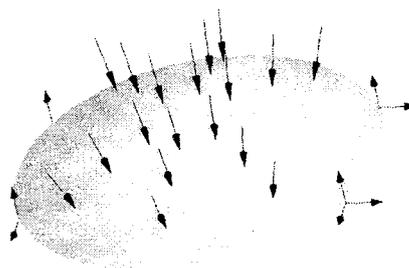


Рис. 1. Сферическая оболочка

**Решение.**

Для решения данной задачи будем использовать МИКФ. Его сущность заключается в интерполяции на основе двух известных решений для ограниченного подмножества областей, объединенных каким-либо одним непрерывным (или дискретным) геометрическим преобразованием с коэффициентом формы в качестве аргумента. При анализе фигур этого множества следует выбрать среди них хотя бы две фигуры, решения для которых известны («опорные» решения).

В качестве такого геометрического преобразования рассмотрим изменение гауссовой кривизны сферической панели при сохранении размеров в плане (рис. 2). В качестве опорных фигур выберем сферические панели с углами  $\alpha_1 = 85^\circ$  (угол раствора  $\varphi_1 = 10^\circ$ ) и  $\alpha_2 = 60^\circ$  (угол раствора  $\varphi_2 = 60^\circ$ ).

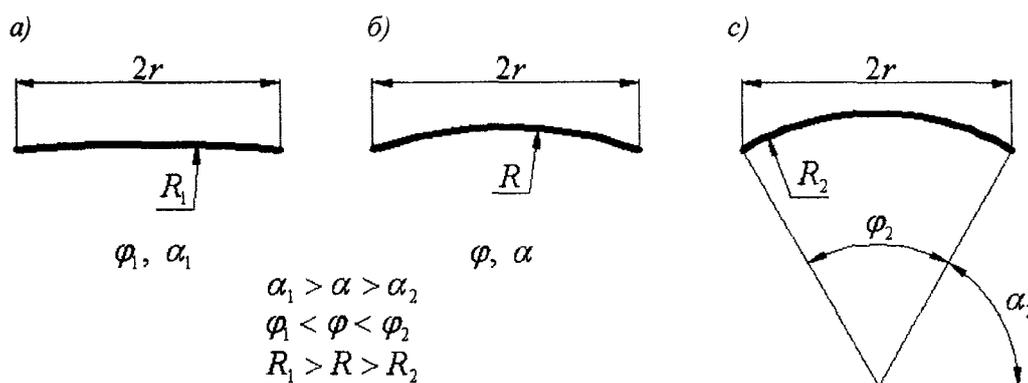


Рис. 2. Геометрическое преобразование пологой сферической оболочки

Коэффициент формы для кусочно-гладких поверхностей в общем виде определяется по формуле [5]:

$$K_f = \frac{n}{2A} \sum_{i=1}^n L_i^2 + \frac{2An\Gamma}{2 - n + \sum_{i=1}^n \left( \theta_i - \int_{L_i} k_G ds \right)},$$

где  $n$  – число участков ограничивающего контура;  $A$  – площадь поверхности;  $L$  – периметр ограничивающего контура;  $\Gamma$  – гауссова кривизна;  $\theta_i$  – входящие углы, образуемые ограничивающим контуром;  $k_G$  – геодезическая кривизна.

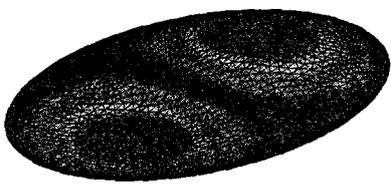
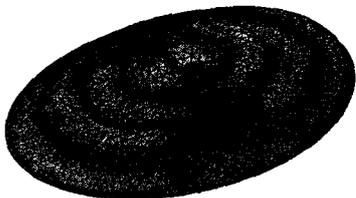
Используя теорему Гаусса-Бонне и некоторые преобразования, для сферической поверхности получим:

$$K_f = \frac{(2\pi r)^2}{2A} + \frac{2A}{R^2},$$

где  $A$  – площадь поверхности;  $r$  – радиус кривизны ограничивающего контура;  $R$  – главные радиусы кривизны поверхности.

Решение задачи устойчивости для панелей (опорных решений) получим методом конечных элементов (МКЭ), используя модули APM Studio (препроцессор создания моделей для конечно-элементного анализа) и APM Structure3D (процессор конечно-элементного анализа и постпроцессор визуализации результатов).

Решение задачи устойчивости для опорных фигур  
методом конечных элементов

	Первое опорное решение	Второе опорное решение
Коэффициент формы $K_f$	6,319	7,546
Приведенная верхняя критическая нагрузка $q^*$ , Н	6465,64	204607
Форма потери устойчивости		

Предположим, что зависимость приведенной верхней критической нагрузки от коэффициента формы панели линейная.

Найдем, например, значение приведенной верхней критической нагрузки для сферической панели с углом  $\alpha = 75^\circ$  (коэффициент формы такой панели равен 6,605). Используя линейную интерполяцию, получим  $q^*_{\text{МКФ}} = 52540,54 \text{ Н}$ , что отличается от решения, полученного методом конечных элементов ( $q^*_{\text{МКЭ}} = 51779,58 \text{ Н}$ ) на 1,47%.

Не ограничиваясь только зоной пологости, найдем приведенную верхнюю критическую нагрузку для сферической оболочки с углом  $\alpha = 15^\circ$  ( $K_f = 13,268$ ). Линейно экстраполируя, вычислим  $q^*_{\text{МКФ}} = 1128855,11 \text{ Н}$ , что отличается от решения, полученного методом конечных элементов ( $q^*_{\text{МКЭ}} = 1118768,37 \text{ Н}$ ) на 0,9%.

Изменение коэффициента формы и приведенной верхней критической нагрузки при описанном выше геометрическом преобразовании представлены кривыми  $K_f(\alpha)$  и  $q^*(\alpha)$  на рисунке 3. Рисунок наглядно иллюстрирует закономерности изменения рассматриваемых характеристик при выбранном геометрическом преобразовании.

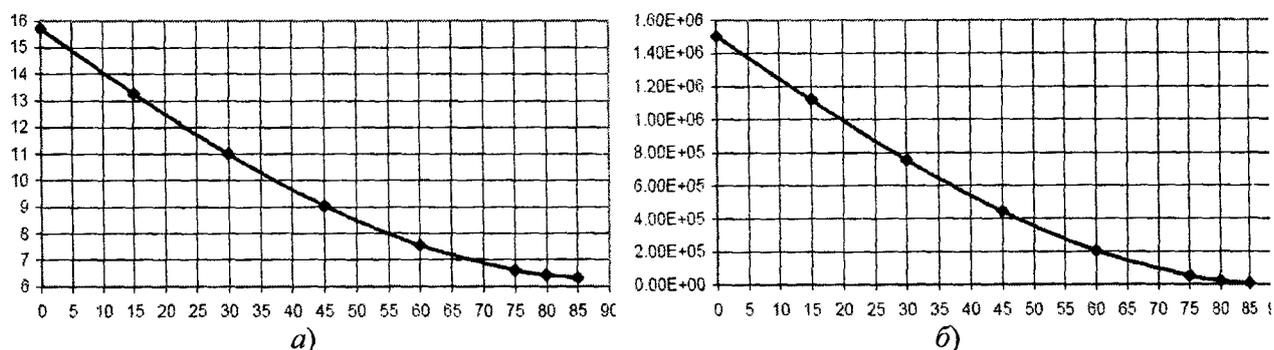


Рис. 3. Изменение характеристик оболочки в зависимости от угла  $\alpha$  (при уменьшении гауссовой кривизны поверхности): а - коэффициента формы; б - приведенной верхней критической нагрузки

Следует отметить тот факт, что кривые, представленные на рисунке 3, «похожи». Это косвенно подтверждает аналитическую взаимосвязь между верхней критической нагрузкой и коэффициентом формы оболочки.

Представим графически изменение верхней критической нагрузки в зависимости от изменения коэффициента формы оболочки (рис. 4).

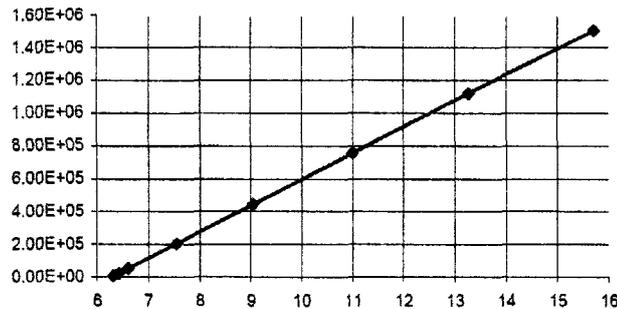


Рис. 4. График изменения верхней критической нагрузки в зависимости от коэффициента формы оболочки

Визуальный анализ кривой на рисунке 4 показывает, что эту кривую можно легко аппроксимировать линейной функцией, используя в качестве аргумента коэффициент формы, и с ее помощью определять значения критических нагрузок.

Таким образом, для сферической оболочки, закрепленной по краю, без каких либо предположений о форме потери устойчивости получаем величину критической нагрузки:

$$q^* = 161523,69 \cdot K_f - 1014277,39.$$

Значения приведенных верхних критических нагрузок представлены в таблице 2.

Таблица 2

Сравнение результатов полученных с помощью МИКФ и МКЭ

Угол $\alpha$ , град	Площадь, $A$ , м <sup>2</sup>	Коэффициент формы $K_f$	Верхняя критическая нагрузка, $q^*$ , Н		Разность, %
			МИКФ	МКЭ	
0	0.01570679	15.70725932	1522817.02	1503092.45	1.31
15	0.01247734	13.26822442	1128855.11	1118768.37	0.9
30	0.01047115	10.99544982	761748.18	754896.60	0.91
45	0.00920082	9.04376519	446504.89	443783.00	0.61
60	0.00841727	7.54616507	204607.00	204607.00	0
75	0.00798957	6.60471518	52540.54	51779.58	1.47
80	0.00791357	6.42677224	23798.54	22605.89	3.5
85	0.00786843	6.31946349	6465.64	6465.64	0

Из анализа табличных данных можно сделать вывод о том, что результаты, полученные с помощью МИКФ и МКЭ, совпадают с погрешностью не более 3,5%.

Литература

1. Коробко, А.В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости [Текст] / А.В. Коробко. - М.: АСВ, 1999. - 302 с.
2. Мануйлов, Г.А. Геометрические оценки основной частоты шарнирно опертых полигональных пластин и пологих сферических оболочек [Текст] / Г.А. Мануйлов // Сб. «Инженерные проблемы прикладной механики». - М., 1987. - С. 87-94.
3. Дехтярь, А.С. Форма и несущая способность призматических оболочек [Текст] / А.С. Дехтярь, Д.Ф. Погорелый // Сопротивление материалов и теория сооружений, 1989. - № 55. - С. 41-44.
4. Коробко, А.В. Расчет устойчивости прямоугольной в плане пологой оболочки методом интерполяции по коэффициенту формы [Текст] / А.В. Коробко, А.В. Чикулаев // Известия ОрелГТУ. Серия. «Строительство. Транспорт». - Орел, 2006. - №3-4 (11-12). - С. 35-38.
5. Коробко, А.В. Коэффициент формы области с криволинейной поверхностью [Текст] / А.В. Коробко, В.Н. Сокотущенко, А.В. Чикулаев // Строительная механика и расчет сооружений. - М.: ФГУП «НИЦ «Строительство», 2007. - С. 50-53.

УДК 624.046.2

Аспирант Д.С. Меркулов

(Курский государственный технический университет)

Россия, г. Курск, тел. 8 (4712) 53-84-64; e-mail: mds@kursknet.ru

## ПРОЧНОСТЬ СОСТАВНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

*Проведен анализ существующих методов расчета железобетонных конструкций при изгибе с кручением. Предложена физическая модель силового сопротивления железобетонного элемента составного сечения при сложном сопротивлении.*

*The analysis of existing methods of calculation of reinforced concrete constructions is lead at a bending down with torsion. The physical model of power resistance of a reinforced-concrete element of integral sectional view is offered at complex resistance.*

При проектировании железобетонных конструкций выделяют различные напряженные состояния (изгиб, сжатие, растяжение). Для ряда конструкций, когда нагрузки прикладываются с некоторым эксцентриситетом относительно продольной оси элемента, имеет место сложное напряженное состояние - изгиб с кручением. Кручение изгибаемых элементов имеет место во всех случаях, когда поперечная нагрузка прикладывается на некотором расстоянии от продольной оси элемента. В соответствии со СНиП 2.03.01-84\* [1] необходимо проверять несущую способность наиболее опасного пространственного сечения.

Конструкции при действии крутящего момента рассчитывают вероятностным методом, рассматривая три возможных расчетных случая (зависящих от расположения сжатой зоны) (рис. 1).

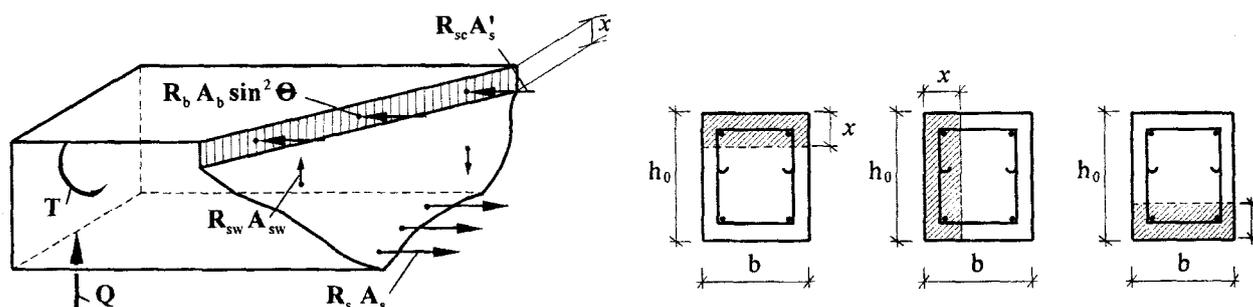


Рис. 1. К расчету железобетонных элементов на изгиб с кручением по методике СНиП 2.03.01-84\*

Основное условие прочности пространственных сечений:

$$T \leq R_s A_s \frac{1 + \varphi_w \delta \lambda^2}{\varphi_q \lambda + \chi} (h_0 - 0,5x), \quad (1)$$

где параметры  $\chi$  и  $\varphi_q$  определяет расчетный случай.

В СП 52-101-2003 [2] расчет прочности железобетонных элементов на действие крутящих моментов производится на основе модели пространственных сечений. При расчете по этой модели рассматривают сечения, образованные наклонными отрезками прямых, следующими по трем растянутым граням элемента, и замыкающим отрезком прямой по четвертой сжатой грани элемента (рис. 2). Расчет элементов производят по прочности элемента между пространственными сечениями и по прочности пространственных сечений.

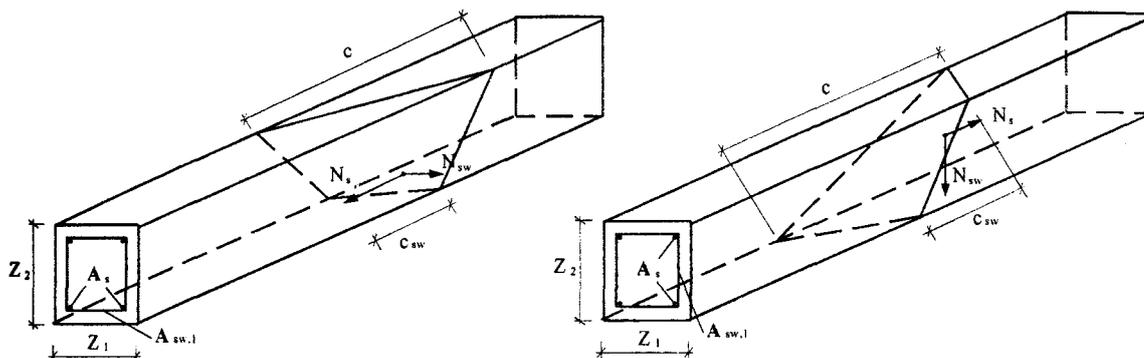


Рис. 2. Схема усилий в пространственных сечениях при расчете на действие крутящего момента

Прочность по бетону между пространственными сечениями характеризуется максимальным значением крутящего момента, определяемым по сопротивлению бетона осевому сжатию с учетом напряженного состояния в бетоне между пространственными сечениями.

Расчет по пространственным сечениям производят на основе уравнений равновесия всех внутренних и внешних сил относительно оси, расположенной в центре сжатой зоны пространственного сечения элемента. Внутренние моменты включают момент, воспринимаемый арматурой, следующей вдоль оси элемента, и арматурой, следующей поперек оси элемента, пересекающей пространственное сечение и расположенной в растянутой зоне пространственного сечения и у растянутой грани элемента, противоположной сжатой зоне пространственного сечения. При расчете рассматривают все положения пространственного сечения, принимая сжатую зону пространственного сечения у нижней, боковой и верхней граней элемента.

Расчет на совместное действие крутящих и изгибающих моментов, а также крутящих моментов и поперечных сил производят, исходя из уравнений взаимодействия между соответствующими силовыми факторами:

$$T \leq T_{sw} + T_s, \quad (2)$$

где  $T$  - крутящий момент в пространственном сечении, определяемый от всех внешних сил, расположенных по одну сторону пространственного сечения;  $T_{sw}$  - крутящий момент, воспринимаемый арматурой пространственного сечения, расположенной в поперечном по отношению к оси элемента направлении;  $T_s$  - крутящий момент, воспринимаемый арматурой пространственного сечения, расположенной в продольном направлении.

Такой подход позволяет учесть реальный вклад составных частей (бетона и арматуры) в работу сечения, избежав при этом эмпирической оценки указанных факторов.

Адекватная оценка сопротивления конструкции изгибу с кручением представляется возможной на основе физической модели [3, 4]. Эта расчетная модель сопротивления железобетонных конструкций на кручение с изгибом позволяет учесть ряд таких важнейших факторов, как осевые и "нагельные" усилия в арматуре, сложное напряженно-деформированное состояние сжатой зоны бетона. Согласно этой модели разрушение железобетонных элементов по пространственным сечениям может происходить в том случае, если на элемент, помимо изгибающих моментов, поперечных сил, действуют крутящие моменты. При действии крутящих моментов в железобетонном элементе образуется спиральная трещина, которая в пределах трех граней элемента вместе с замыкающей ее сжатой зоной по четвертой грани образует пространственное сечение (рис. 3). При этом рассматривают три схемы расположения сжатой зоны (см. рис. 3): у верхней грани элемента, сжатой от изгиба, у боковой грани элемента, параллельной плоскости изгиба, у нижней грани элемента, растянутой от изгиба.

В общем объеме железобетонных конструкций значительную часть занимают составные элементы: конструкции плит перекрытий, ограждающие элементы, усиленные конструкции эксплуатируемых зданий и сооружений.

Особенностью конструкций данного класса является совместная работа бетонов с разными прочностными и деформационными характеристиками, что налагает специфические требования к их проектированию, особенно усиленных железобетонных конструкций. Существующие нормативные методики не позволяют учесть отмеченных особенностей составных железобетонных конструкций.

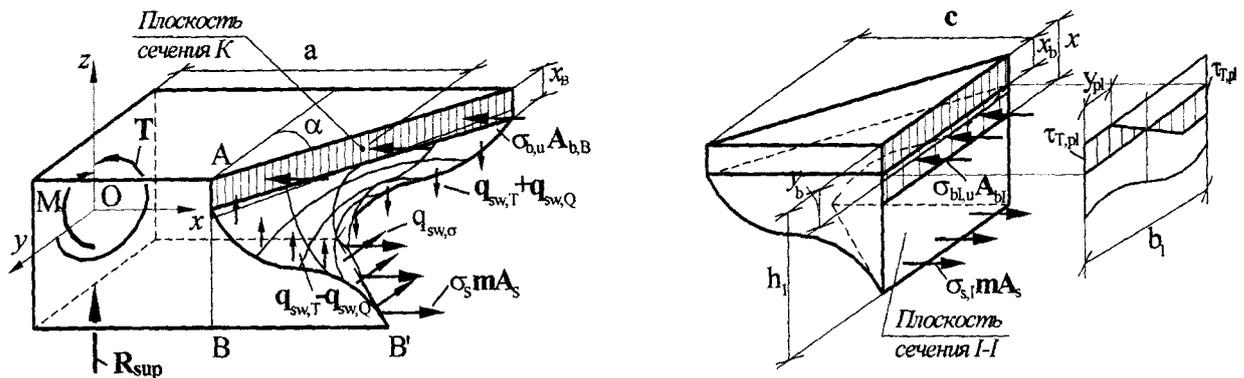


Рис. 3. К построению расчётной модели железобетонного элемента при совместном действии изгибающего момента, крутящего момента и поперечной силы

Из известных методик расчета составных железобетонных конструкций следует отметить [5, 6], как наиболее логически завершенные. Бетоны сечения заменяются приведенным, с учетом компоновки сечения и прочностных характеристик бетонов. Рассматривается случай косоугольного изгиба, для которого условие прочности:

$$M_1 + M \leq M_p = R_{np} \left[ S_{m1} + \frac{I_{ynp} + S_{ynp}(h_0 - x)}{(1 - \lambda_{yp})x} \right] + \sum_{i=1}^n \sigma'_{a(i)} S'_{a(i)} - \sum_{i=1}^n \sigma_{a(i)} S_{a(i)}, \quad (3)$$

где  $S_{m1}$  – статический момент площади сжатой части сечения, работающей в пластической стадии, относительно оси, параллельной прямой, ограничивающей сжатую зону и проходящей через ц.т. сечения наиболее растянутого стержня;  $S_{a(i)}$  и  $S'_{a(i)}$  – статический момент сечения арматур  $A_{(i)}$  и  $A'_{(i)}$  относительно той же оси.

Таким образом, на сегодняшний день отсутствуют методики расчета элементов составного сечения, учитывающие их специфику при сложном напряженном состоянии.

Для расчета составных элементов на изгиб с кручением приняты основные предпосылки [4], в соответствии с которыми предложена модель пространственных сечений (рис. 4).

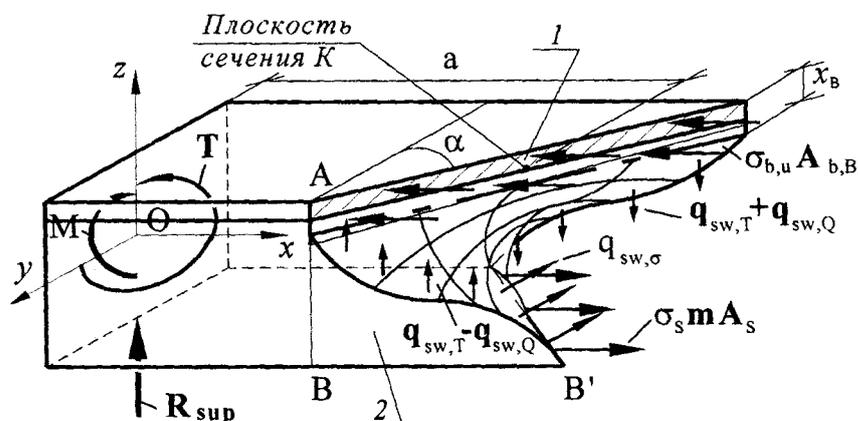


Рис. 4. Физическая модель работы пространственного сечения при изгибе с кручением (1 – бетон монолитивания; 2 – сборный бетон)

Как отмечено в [4], основным элементом расчетной модели является определение функции для определения проекции опасной наклонной трещины:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \lambda_2 \varphi_2(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1, \dots, x_n) + f'(x'_1, \dots, x'_n) + \lambda'_1 \varphi'_1(x'_1, \dots, x'_n) + \dots + \lambda'_m \varphi'_m(x'_1, \dots, x'_n). \quad (4)$$

Зависимость (4) позволяет дополнительно к известным определить систему вспомогательных параметров, оценивающих компоновку сечения, прочностные и деформативные характеристики бетонов, степень податливости конструктивного шва.

#### Литература

1. СНиП 2.03.01 – 84\*. Бетонные и железобетонные конструкции [Текст] / Госстрой СССР. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985. – 79 с.
2. СП 52-101-2003. Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры [Текст] / ГУП «НИИЖБ», ФГУП ЦПП, 2004. – 53 с.
3. Колчунов, Вл.И. Расчетная модель силового сопротивления железобетонных конструкций на кручение с изгибом [Текст] / Вл.И. Колчунов, Н.В. Клюева, Г.А. Сафонов // «Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения». Материалы Международных академических чтений. – Курск, 2005. – С. 95 – 111.
4. Колчунов, Вл. И. Сложное сопротивление железобетонных конструкций на кручение с изгибом [Текст] / Вл.И. Колчунов, Н.В. Клюева, Г.А. Сафонов // «Вестник центрального регионального отделения РААСН». Выпуск 4. – Воронеж-Иваново, 2005. – С. 113 – 124.
5. Проектирование и изготовление сборно-монолитных конструкций [Текст] / Под ред. А.Б. Гольшева. – Киев: Будівельник, 1982. – 152 с.
6. Проектирование железобетонных сборно-монолитных конструкций [Текст] / Н-и. проект.-конструкт. и технолог. ин-т бетона и железобетона. – М.: Стройиздат, 1991. – 69 с.

УДК 624.04

Канд. техн. наук, проф. С.Г. Парфенов; канд. техн. наук, доц. М.Ю. Прокуров;  
аспирант Д.Ю. Пикин  
(Брянская государственная инженерно-технологическая академия)  
Россия, г. Брянск

## КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ЖИВУЧЕСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СКЛАДЧАТЫХ СИСТЕМ НА ЭВМ

*В статье анализируется поведение пространственной железобетонной складчатой системы при запроектном воздействии, вызванном мгновенным выключением из работы одного из элементов торцевой диафрагмы.*

В связи с изношенностью основных фондов, вызывающей опасность возникновения аварийных ситуаций техногенного характера, проблема обеспечения конструктивной безопасности строительных систем приобретает в нашей стране все большее значение. В последнее время критериями оценки конструктивной безопасности систем являются не только надежность и выполнение условий I-го предельного состояния, но и живучесть, понимаемая как свойство системы в полном или частичном объеме выполнять заданные функции при внезапном отказе одного или нескольких её элементов. Данный критерий оценки возможности прогрессирующего лавинообразного разрушения конструкций представляется весьма важным при проектировании особо ответственных строительных объектов.

В целях исследования возможности прогрессирующего разрушения рассмотрим складчатую пространственную систему, состоящую из пяти диафрагм жесткости – безраскосных железобетонных ферм пролетом  $L=18$  м и высотой  $h=3$  м каждая с покрытием из ребристых железобетонных плит пролетом  $B=6$  м, материал конструкций бетон класса В30 (рис. 1, а).

Решение данной исследовательской задачи предполагает использование метода предельных состояний для анализа несущей способности при повреждениях системы; методики учета динамического воздействия, возникающего при мгновенном выключении из работы одного из элементов системы [3]; метода конечных элементов, реализованного в используемом программном комплексе<sup>1</sup>.

Построение физической модели рассматриваемой пространственной системы предусматривает использование соответствующих типов конечных элементов (КЭ). Так, согласно установленной системе обозначений, диафрагмы жесткости и ребра плит представлены в виде КЭ – пространственных стержней с шестью степенями свободы (тип 5). Полки плит покрытия представлены в виде КЭ – универсальный прямоугольный элемент оболочки (тип 41). Для продольных ребер плит покрытия предусмотрен поворот местных осей поперечного сечения в пространстве, для оболочки покрытия – шарнирное сопряжение между отдельными блоками покрытия.

Порядок исследования предусматривает проведение проектного расчета при заданной распределенной нагрузке, а также «аварийного» расчета при выключении из работы одного из центральных стержней нижнего пояса диафрагмы, что рассматривается в данном случае в качестве внезапного запроектного воздействия. Таким образом, решается конструктивно нелинейная задача анализа живучести оставшейся пространственной системы – выявление возможного лавинообразного разрушения.

Проектный расчет системы проведен на действие равномерно распределенной нагрузки, значение которой принято  $3,22 \text{ кН/м}^2$  [5].

«Аварийный» расчет выполнялся по методике, предложенной проф. Г.А. Гениевым [2], в упругой постановке без привлечения аппарата динамики сооружений. При этом дополнительно к проектной нагрузке добавляются сосредоточенные силы, моделирующие внезапное выключение из

<sup>1</sup> Расчет выполнялся с использованием программного комплекса SCAD в Орловском государственном университете.