

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Председатель:

Голенков В.А. д.т.н., проф.

Зам. председателя

Степанов Ю.С. д.т.н., проф.

Светкин В.В. к.т.н., доцент;

Колчунов В.И. д.т.н., проф.;

Гордон В.А. д.т.н., проф.;

Константинов И.С. д.т.н., проф.;

Садков В.Г. д.э.н., проф.;

Кулаков А.Ф. к.т.н., доцент;

Фролова Н.А. к.соц.н., доцент;

Соков О.А. к.т.н., доцент;

Борзенков М.И. к.т.н., доцент;

Поландова Л.И.

Одолеева М.В.

РЕДКОЛЛЕГИЯ СЕРИИ

Главный редактор:

Гордон В.А. д.т.н., проф.

Зам. главного редактора:

Шоркин В.С. д.ф.-м.н., проф.

Технический редактор:

Разина Е.В.

Ушаков Л.С. д.т.н., проф.;

Харламов В.Ф. д.ф.-м.н., проф.;

Куценко С.А. д.т.н., проф.;

Фроленков К.Ю. к.т.н., доцент

АДРЕС РЕДКОЛЛЕГИИ СЕРИИ

302020, Россия, г. Орел,

Наугорское шоссе, 29

Кафедра «Высшая математика»

Редколлегия журнала Известия ОрелГТУ

Серия «Естественные науки»

тел.: (4862) 419848

факс: (4862) 416684

e-mail: Gordon@ostu.ru

Зарегистрировано в Министерстве РФ
по делам печати, телерадиовещания и
средств массовой информации
Свидетельство: ПИ № 77-15469
от 20 мая 2003 г.

Формат 69x90/8

Печать ризография. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. – 13,75

Тираж 500 экз.

Содержание

• **МАТЕМАТИКА**

<i>Поландов Ю.Х., Власенко С.А.</i> Вариант доказательства формулы Стокса....	3
<i>Раков В.И.</i> О некоторой неадекватности формальных методов приближений и процессов моделирования нелинейностей.....	8
<i>Соломахин А.Г.</i> Программные средства для инженерной методики вычислительного эксперимента по предварительной обработке нелинейностей.....	24

• **ИНФОРМАТИКА**

<i>Бочков П.В.</i> Методика решения задачи оптимизации размещения информационных ресурсов в локальной вычислительной сети.....	30
<i>Радыгин В.М., Бочков П.В.</i> Формализация задачи оптимизации размещения и организации защиты информационных ресурсов при доминировании требований оперативности обеспечения доступа пользователей локальной вычислительной сети.....	37

• **МЕХАНИКА**

<i>Анохин П.Н., Гордон В.А.</i> Постановка и решение обратной задачи для продольных упругих колебаний неоднородного стержня.....	44
<i>Берестовицкий Э.Г., Гладилин Ю.А., Лебедев С.В.</i> Теоретические исследования гидромеханических источников виброактивности гидравлических приборов в стационарных режимах работы.....	50
<i>Верижников А.П.</i> К расчету колебаний стержней с периодической неоднородностью.....	57
<i>Волов Д.Б.</i> Перспективы использования баллистических устройств в качестве источников оптического излучения.....	60
<i>Деренговский А.Г.</i> Краевая задача с условиями в угловых точках. Существование и единственность решения.....	65
<i>Корнеев Ю.С., Корнеева Е.Н., Корнеева Т.Ю.</i> Анализ работы пусковых устройств приводов технологических машин.....	70
<i>Моисеенко А.А.</i> Оценка точности теоретического решения конструкционной прочности соединения по макропрерывистой цилиндрической поверхности с гарантированным натягом.....	74
<i>Немировский Ю.В.</i> Особенности выпучивания слоистых стержней при сжимающих нагрузках.....	78
<i>Сиваченко Л.А., Хононов Д.М.</i> Теоретический анализ работы рабочих органов пружинных мельниц в условиях интенсивных колебаний.....	82

• **ФИЗИКА**

<i>Бармин А.В., Мосин Ю.В.</i> Исследование физических процессов на поверхности твердых тел с использованием периодических пульсаций потока активных частиц газа.....	88
<i>Варгашкин В.Я.</i> Обобщенная формула нецентрального взаимодействия и явление гравитационного самолинзирования.....	92
<i>Мосин Ю.В.</i> Автоколебательные процессы на поверхности твердых тел.....	99

• **ХИМИЯ**

<i>Комова В.И.</i> Экстракционно-хроматографическое поведение железа (III) на колонке с расплавом триоктилфосфиноксидом.....	101
<i>Куценко С.А., Цымай Д.В., Малофеев С.М., Суханова В.А.</i> Термодинамическая оценка равновесных составов в системе $MgCO_3 - CO_2 - SO_2$	103

Адрес серии «Естественные науки»:
302020, г. Орел, Наугорское шоссе, 29
Кафедра «Высшая математика»
тел: (4862) 419848
факс: (4862) 416684
e-mail: Gordon@ostu.ru

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи по всем разделам математики, механики, физики, химии и их приложениям. Редакция серии приглашает к сотрудничеству отечественных и зарубежных авторов, занимающихся изучением научных проблем, которым посвящен настоящий журнал.

Журнал открыт для рекламы, оплата на договорной основе.

Объем материала, предлагаемого к публикации, измеряется страницами текста, напечатанного на листах формата А4, и, как правило, не должен превышать семи страниц для статьи, двух – для краткого сообщения, одной – для рекламного объявления. Материал принимается в **файловом виде** по электронной почте или на **дискетах** 3,5 дюйма, выполненный в любом из текстовых редакторов **MS Word**, с приложением распечатки.

ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЬИ:

Размер шрифта 11 пт (пунктов), междустрочный интервал одинарный, поля сверху, слева, снизу по 25 мм, справа 15 мм.

Рисунки представляются в черно-белом виде, преимущественно в одном из форматов приложений Microsoft (Word, Excel, Power Point или в форматах .gif, .wmf, .jpg). В порядке исключения допускается представление рисунков, выполненных качественно тушью.

Формулы: с использованием редактора формул **MS Equation 3.0**; размеры: обычный – 11 пт, крупный индекс – 9 пт, мелкий индекс – 7 пт, крупный символ – 14 пт, мелкий символ – 10 пт; стиль всех переменных наклонный.

В редакцию представляются:

1. Текст публикации.
2. Реферат (5-7 строк) **на русском и английском языке.**
3. Заглавие статьи, фамилии и инициалы авторов **на русском и английском языке.**
4. Экспертное заключение о возможности опубликования.
5. Сведения об авторах.

К обязательным элементам оформления статьи относятся: индекс УДК, инициалы и фамилии авторов, название высшего учебного заведения (организации), заглавие, реферат (5-7 строк), название вуза (организации) – полное, в соответствии с последней редакцией устава.

В тексте все сокращения, за исключением общепринятых, расшифровываются. Физический смысл символов в формулах объясняется. Значения физических величин приводятся в единицах СИ или разрешенных к употреблению наравне с ними. Буквенные обозначения, цифры, знаки и их расположение должны быть четкими и различимыми.

Список **использованной** литературы оформляется согласно ГОСТ 7.1-84 «Библиографическое описание документа». Нумерация позиций – согласно очередности ссылок в тексте.

Иллюстрации выполняются с учетом последующего воспроизведения средствами оперативной полиграфии: штриховые (чертежи, схемы, графики, технические рисунки) – **в соответствии с требованиями ЕСКД** – программно, с использованием графических редакторов.

Реферат оформляется в соответствии с правилами ВИНТИ.

Сведения об авторах должны содержать: фамилию, имя, отчество, должность, название кафедры, вуза, организации, ученую степень и звание, домашний адрес, номера служебного и домашнего телефонов, а при возможности – e-mail.

Датой поступления статьи считается последняя после доработки.

Образец оформления статьи

УДК ??? ???

Пробел 11 пт

Иванов А.А., докт. техн. наук, профессор кафедры «Высшая математика»

Петров В.В., канд. техн. наук, доцент кафедры «Высшая математика»

(Орловский государственный технический университет)

г.Орел, тел.(4862)419848; e-mail: Gordon@ostu.ru

Пробел 11 пт

Через 1 интервал
11 пт, курсив

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ 13 ПТ, ШРИФТ ПОЛУЖИРНЫЙ, ВЫРАВНИВАНИЕ ПО ЦЕНТРУ, ПРОПИСНЫМИ БУКВАМИ

Пробел 10 пт

Реферат на английском языке 5-7 строк 10 пт, курсив, выравнивание по ширине, отступ красной строки 1,25 мм (**никаких других отступов не допускается**)

Пробел 10 пт

Статья до 7 страниц Times New Roman 11 пт, выравнивание по ширине, отступ красной строки 1,25 мм (**никаких других отступов не допускается**)

Рисунок по центру статьи, положение перед текстом

Рис. 1. Название рисунка (10 пт, курсив, форматирование по центру)

МАТЕМАТИКА

УДК 512.623 (075)

*Поландов Ю.Х., докт. техн. наук, профессор кафедры «Высшая математика»
Власенко С.А., канд. техн. наук, доцент кафедры «Высшая математика»
(Орловский государственный технический университет)
г.Орел, тел. (4862) 413295*

ВАРИАНТ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ФОРМУЛЫ СТОКСА

В учебниках по математике, предназначенных для ВТУЗов, формула Стокса доказывается не достаточно строго. В связи с этим предлагается вариант доказательства, обеспечивающий более четкое описание предмета обсуждения.

Формула Стокса, как известно, устанавливает связь между интегралом по поверхности $z = f(x, y)$ в поле вектора $\vec{A}(x, y, z)$ и интегралом по замкнутому контуру $L(x, y, z)$, лежащим на этой поверхности и ограничивающим ее часть S . При этом предполагается, что поверхность внутри рассматриваемого контура и на самом контуре непрерывная и кусочно-гладкая, кроме того, непрерывно и векторное поле вместе со своими частными производными первого порядка во всех точках области поверхности S и на контуре L .

Эта формула имеет вид:

$$\iint_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \oint_L \vec{A} d\vec{l}, \quad (1)$$

где

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (2)$$

и

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_L A_x dx + A_y dy + A_z dz. \quad (3)$$

Рассмотрим доказательство формулы, предварительно оговорив некоторые условия.

Как известно, при выводе формулы Грина используется понятие правильного контура. Формула сначала доказывается для такого контура, а затем ее обосновано распространяют на неправильные контуры. Так и в нашем случае, мы формулу Стокса докажем для правильного контура и (встает новая проблема) правильной поверхности, а затем докажем справедливость этой формулы и других, «неправильных», контуров и поверхностей.

Правильным пространственным контуром назовем тот, проекции которого на координатные плоскости дают правильные контуры, характерные тем, что любые прямые, параллельные соответствующим осям координат, пересекают их не более чем в двух точках. Правильной поверхностью назовем ту, которая «натянута» на правильный контур как мыльная пленка.

Можно считать, что рассматривается плоская поверхность, на которой расположен контур эллипсоидального типа, а нормаль этой поверхности образует с координатными осями положительные острые углы. Тогда любая прямая, параллельная любой оси координат, пересечет поверхность S не более одного раза, а проекции контура L пересекутся соответствующими прямыми, параллельными осям координат, не более чем два раза.

Важно в данном случае то, что границы проекций поверхности будут совпадать с проекцией контура (проекция поверхности не выйдет за пределы проекции контура) и потому для всех проекций будет справедлива формула Грина.

При выводе формулы Стокса нами будут использованы не совсем очевидные зависимости, поэтому выделим их в отдельные блоки.

Лемма 1. Пространственный вектор \vec{A} разлагается по проекциям на координатные плоскости так, что $\vec{A} = 0,5(\vec{A}_{x0y} + \vec{A}_{x0z} + \vec{A}_{y0z})$, где \vec{A}_{x0y} , \vec{A}_{x0z} и \vec{A}_{y0z} – проекции вектора \vec{A} на координатные плоскости (не координатные оси!).

Доказательство. Пусть задан вектор через его проекции на координатные оси: $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$.

Тогда

$$\vec{A} = 0,5[2A_x \vec{i} + 2A_y \vec{j} + 2A_z \vec{k}] = 0,5[(A_x \vec{i} + A_y \vec{j}) + (A_x \vec{i} + A_z \vec{k}) + (A_y \vec{j} + A_z \vec{k})].$$

Но, $A_x \vec{i} + A_y \vec{j} = \vec{A}_{x0y}$, $A_x \vec{i} + A_z \vec{k} = \vec{A}_{x0z}$ и $A_y \vec{j} + A_z \vec{k} = \vec{A}_{y0z}$, поэтому $\vec{A} = 0,5(\vec{A}_{x0y} + \vec{A}_{x0z} + \vec{A}_{y0z})$.
Что и требовалось доказать.

Лемма 2. Скалярное произведение двух векторов, заданных в пространстве, равно половине суммы скалярных произведений их соответствующих проекций на координатные плоскости, то есть:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0,5(\vec{A}_{x0y} \vec{B}_{x0y} + \vec{A}_{x0z} \vec{B}_{x0z} + \vec{A}_{y0z} \vec{B}_{y0z}).$$

Доказательство. Пусть заданы векторы \vec{A} и \vec{B} через их проекции на координатные оси: $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ и $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= 0,5(2A_x \vec{i} + 2A_y \vec{j} + 2A_z \vec{k}) \cdot 0,5(B_x \vec{i} + B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k} + B_z \vec{k}) = \\ &= 0,25[2(A_x B_x + A_y B_y) + 2(A_x B_x + A_z B_z) + 2(A_y B_y + A_z B_z)]. \end{aligned}$$

Но $\vec{A}_{x0y} \vec{B}_{x0y} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j})(B_x \vec{i} + B_y \vec{j}) = A_x B_x + A_y B_y$, $\vec{A}_{x0z} \vec{B}_{x0z} = A_x B_x + A_z B_z$ и $\vec{A}_{y0z} \vec{B}_{y0z} = A_y B_y + A_z B_z$, поэтому $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0,5(\vec{A}_{x0y} \vec{B}_{x0y} + \vec{A}_{x0z} \vec{B}_{x0z} + \vec{A}_{y0z} \vec{B}_{y0z})$.

Что и требовалось доказать.

Лемма 3. Интеграл вдоль пути в векторном поле по пространственному замкнутому контуру равен половине суммы интегралов вдоль пути по проекциям поля и контура на координатные плоскости, то есть:

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = 0,5[\oint_{l_{x0y}} \vec{A}_{x0y} d\vec{l} + \oint_{l_{x0z}} \vec{A}_{x0z} d\vec{l} + \oint_{l_{y0z}} \vec{A}_{y0z} d\vec{l}]. \quad (4)$$

Доказательство: Представим интеграл $\oint_L \vec{A} d\vec{l}$ в виде его интегральной суммы

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{m=1}^n \vec{A}_m \Delta \vec{l}_m, \text{ где } \vec{A}_m \text{ – один из векторов поля на участке линии } \Delta \vec{l}_m.$$

Теперь перемножим векторы \vec{A}_m и $\Delta \vec{l}_m$ между собой скалярно, предварительно разложив их по проекциям на координатные плоскости:

$$\vec{A}_m \cdot \Delta \vec{l}_m = \vec{A}_{m(y0z)} \Delta \vec{l}_{m(y0z)} + \vec{A}_{m(x0z)} \Delta \vec{l}_{m(x0z)} + \vec{A}_{m(x0y)} \Delta \vec{l}_{m(x0y)},$$

где $\vec{A}_{m(y0z)}$, $\vec{A}_{m(x0z)}$, $\vec{A}_{m(x0y)}$, $\Delta \vec{l}_{m(y0z)}$, $\Delta \vec{l}_{m(x0z)}$ и $\Delta \vec{l}_{m(x0y)}$ – проекции вектора поля \vec{A}_m и участка линии $\Delta \vec{l}_m$ на координатные плоскости.

С учетом этого интегральную сумму можно выразить через интегральные суммы по координатным плоскостям:

$$\lim_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{m=1}^n \bar{A}_m \Delta \bar{l}_m = \lim_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{m=1}^n 0,5 \cdot [\bar{A}_{m(y0z)} \Delta \bar{l}_{m(y0z)} + \bar{A}_{m(y0z)} \Delta \bar{l}_{m(y0z)} + \bar{A}_{m(x0y)} \Delta \bar{l}_{m(x0y)}] =$$

$$\lim_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{m=1}^n 0,5 \bar{A}_{m(y0z)} \Delta \bar{l}_{m(y0z)} + \lim_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{m=1}^n 0,5 \bar{A}_{m(y0z)} \Delta \bar{l}_{m(y0z)} + \lim_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{m=1}^n 0,5 \bar{A}_{m(x0y)} \Delta \bar{l}_{m(x0y)}.$$

Если добавить утверждение, что проекции замкнутой пространственной линии на координатные плоскости являются также замкнутыми линиями, то полученные интегральные суммы имеют прямое отношение к замкнутым линиям L_{y0z} , L_{x0z} и L_{x0y} , лежащим на координатных плоскостях $y0z$, $x0z$ и $x0y$. Совершив предельный переход в интегральных суммах, получим требуемое.

Лемма 4. Если на плоскости $Ax + By + Cz + D=0$ задана бесконечно малая площадка dS , то $dydz = -\frac{A}{C} dx dy$, $dx dz = -\frac{B}{C} dx dy$, где $dx dy$, $dx dz$ и $dy dz$ – проекции dS на координатные плоскости.

Доказательство. Так как площади проекций координатные плоскости любой фигуры, находящейся на плоскости, равны соответственно $S_{x0y} = S \cos \gamma$, $S_{x0z} = S \cos \beta$, и $S_{y0z} = S \cos \alpha$, где $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ – направляющие косинусы нормали к плоскости, а

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \text{и} \quad \cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \text{то} \quad \frac{S_{y0z}}{S_{x0y}} = -\frac{A}{C} \quad \text{и}$$

$$\frac{S_{x0z}}{S_{x0y}} = -\frac{B}{C}.$$

Тогда по аналогии с этим для бесконечно малого участка dS , который можно представить в виде плоской площадки, получаем

$$(dydz) = -\frac{A}{C} (dx dy), \quad (dx dz) = -\frac{B}{C} (dx dy).$$

Что и требовалось доказать.

Замечание: произведения $(dx dy)$ и $(dx dz)$ взяты в скобки, чтобы подчеркнуть, что в этом случае речь идет о проекциях площадок и потому dx слева и dx справа нельзя сокращать между собой.

Выберем следующую стратегию доказательства формулы Стокса: для начала преобразуем слева интеграл в три двойных по площадям и справа – в три по проекциям контура L . Затем, используя формулу Грина применительно ко всем координатным плоскостям, и лемму 3, докажем равенство обеих частей формулы.

Запишем уравнения Грина для проекций на три координатные плоскости:

$$\oint_{L_{x0y}} A_{x0y} dl_{x0y} = \iint_{S_{x0y}} \left(\frac{\partial A_{y(x0y)}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x(x0y)}}{\partial y} \right) dx dy; \tag{5}$$

$$\oint_{L_{x0z}} A_{x0z} dl_{x0z} = \iint_{S_{x0z}} \left(\frac{\partial A_{x(x0z)}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z(x0z)}}{\partial x} \right) dx dz; \tag{6}$$

$$\oint_{L_{y0z}} A_{y0z} dl_{y0z} = \iint_{S_{y0z}} \left(\frac{\partial A_{z(y0z)}}{\partial y} - \frac{\partial A_{y(y0z)}}{\partial z} \right) dy dz. \tag{7}$$

Преобразуем правую часть равенства (4).

Так как $A_{y(x0y)} = A_y(x, y, z(x, y))$ и $A_{x(x0y)} = A_x(x, y, z(x, y))$, а потому

$$\frac{\partial A_{y(x0y)}}{\partial x} = \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial A_{x(x0y)}}{\partial y} = \frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Для плоскости $Ax + By + Cz + D=0$ $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{A}{C}$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{B}{C}$, что учтем в после последовательных преобразованиях равенства (5):

$$\iint_{S_{x0y}} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{S_{x0y}} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{A}{C} - \frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{B}{C} \right) dx dy \text{ и, наконец,}$$

$$I_1 = \iint_{S_{x0y}} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy - \iint_{S_{y0z}} \frac{\partial A_y}{\partial z} dy dz + \iint_{S_{x0z}} \frac{\partial A_x}{\partial z} dx dz. \quad (8)$$

Проведя аналогичные преобразования равенств (5) и (6), можно получить

$$I_2 = \iint_{S_{x0z}} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dx dz - \iint_{S_{x0y}} \frac{\partial A_x}{\partial y} dx dy + \iint_{S_{x0z}} \frac{\partial A_z}{\partial y} dy dz. \quad (9)$$

$$I_3 = \iint_{S_{y0z}} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy dz - \iint_{S_{x0z}} \frac{\partial A_z}{\partial x} dx dz + \iint_{S_{x0y}} \frac{\partial A_y}{\partial x} dx dy. \quad (10)$$

Сложив эти интегралы, найдем, что сумма поверхностных интегралов для $rot \vec{A}$ по всем трем проекциям равна увеличенному в два раза интегралу по поверхности S .

$$2 \iint_{S_{x0y}} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy + 2 \iint_{S_{x0z}} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dx dz + 2 \iint_{S_{y0z}} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy dz = 2 \iint_S rot \vec{A} d\vec{S}. \quad (11)$$

Если сложить левые части равенств (5, 6 и 7), то получим, что сумма интегралов по проекциям контуров равна удвоенному значению интеграла по контуру в пространстве:

$$\oint_{L_{x0y}} \vec{A}_{x0y} d\vec{l}_{x0y} + \oint_{L_{x0z}} \vec{A}_{x0z} d\vec{l}_{x0z} + \oint_{L_{y0z}} \vec{A}_{y0z} d\vec{l}_{y0z} = 2 \oint_L \vec{A} d\vec{l}. \quad (12)$$

Из двух последних равенств вытекает предмет доказательства (1):

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \iint_S rot \vec{A} d\vec{S}.$$

Обратимся к рис. 1. Через контур L проведем еще одну поверхность S_1 такую, что она и поверхность S образовали бы замкнутую (рис. 2). К форме этой поверхности предъявим требования, которые предъявляются к поверхностям, для которых справедлива формула Остроградского – Гаусса: замкнутость, кусочно-гладкость и отсутствие самопересечения. Отметим, что этим требованиям удовлетворяет весьма широкий класс поверхностей.

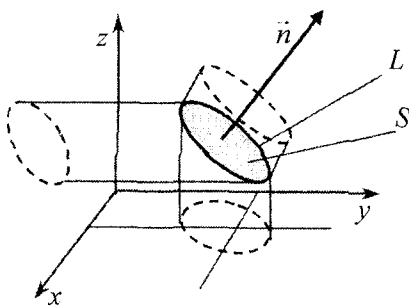


Рис. 1.

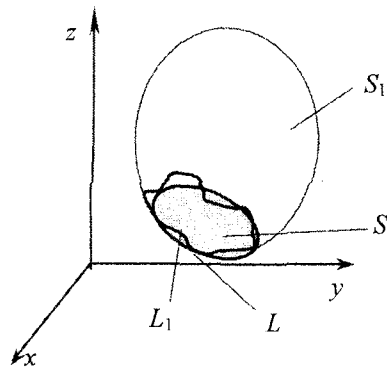


Рис. 2.

Однако надо признать, что, если векторное поле $\vec{A}(x, y, z)$ раньше должно было быть непрерывным и один раз дифференцируемым только на поверхности S , включая контур L , то теперь эти требования распространяются на весь объем V , замкнутый поверхностями S и S_1 , а также по поверхности S_2 . На практике такое требование не сильно ограничивает векторное поле.

Тогда согласно формуле Остроградского-Гаусса можно записать, если интегрировать по внешней части обеих поверхностей,

$$\oiint_{S+S_1} \text{rot} \vec{A} d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \text{rot} \vec{A} dV.$$

Но ведь $\text{div} \text{rot} \vec{A} = 0$, поэтому всегда для любой замкнутой поверхности в векторном поле $\oiint_{S+S_1} \text{rot} \vec{A} d\vec{S} = 0$. Согласно известному свойству интеграла $\oiint_{S+S_1} \text{rot} \vec{A} d\vec{S} = \oiint_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S} + \oiint_{S_1} \text{rot} \vec{A} d\vec{S} = 0$ и потому $\oiint_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S} = -\oiint_{S_1} \text{rot} \vec{A} d\vec{S}$. Но, если интегрировать по поверхностям S и S_1 независимо друг от друга, (внутреннюю сторону поверхности S_1 обозначим через S_{1e}), то за счет изменения знака интеграла будем иметь

$$\oiint_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S} = \oiint_{S_{1e}} \text{rot} \vec{A} d\vec{S}. \quad (13)$$

Видно, что интеграл по контуру L равен интегралу и по «неправильной» поверхности S_{1e} , то есть $\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \oiint_{S_{1e}} \text{rot} \vec{A} d\vec{S}$. Из этого следует, что интеграл по контуру L равен интегралу по любой «не-

правильной» поверхности (с ограничениями, оговоренными выше), лишь бы контур L принадлежал ей и ограничивал ее.

Далее выясним справедливость формулы Стокса для контура неправильной формы. На рис.3 поверхность S_1 ограничена контуром L . Но мы продолжим ее с образованием замкнутого объема. Тогда можно менять форму контура так, что интеграл по поверхности оставался неизменным $\oiint_{S_1} \text{rot} \vec{A} d\vec{S} = \text{Const}$. Понятно, что таких изменений контура может быть неограниченное число, то есть

формула Стокса справедлива для любой формы контура, естественно, кроме тех, которые имеют перехлест.

Вывод: Формула Стокса справедлива для любой формы замкнутого пространственного контура, не имеющего перехлестов, и поверхности непрерывной, кусочно-гладкой, и несамопересекающейся, которая содержит, имеет границей и стягивает этот контур.

Список литературы

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – 2 часть. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 256 с.: ил.
2. Гусак А.А. Высшая математика / В 2-х т. – Т. 2: Учебник для студентов вызов. – 3-е изд., стереотип. – Мн.: ТетраСистемс, 2001. – 448 с., ил.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. Том 2. – изд. 12-е. – М.: Наука, 1978. – 575 с., ил.
4. Бермант А.Ф. Краткий курс мат. анализа для вузов. – Изд. 3-е, стереотип. – М.: Наука, 1965. – 663 с., ил.

УДК 518

Раков В.И., канд. техн. наук, доцент кафедры «Информационные системы»
(Орловский государственный технический университет)
г.Орел, тел. (4862) 761910; e-mail: rakov2000@hotmail.ru

О НЕКОТОРОЙ НЕАДЕКВАТНОСТИ ФОРМАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ПРИБЛИЖЕНИЙ И ПРОЦЕССОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

Рассматривается интерактивная особенность процесса моделирования нелинейных функций.

Введение

Вопросы аппроксимации функций – это предмет формальной теории [1], выраженный, по существу, в своих обобщенных формулировках [2]:

– приближение индивидуального элемента. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство с расстоянием ρ , A – подмножество X . Задача о приближении элемента $x \in X$ множеством A состоит в отыскании величины, называемой расстоянием от x до A :

$$\ell(x, A, X) = \inf_{\xi \in A} \rho(x, \xi). \quad (1)$$

Если существует элемент $\xi_0 \in A$, для которого $\ell(x, A, X) = \rho(x, \xi_0)$, то он именуется экстремальным элементом или элементом наилучшего приближения для x ,

– приближение заданного множества фиксированным аппроксимирующим множеством. Пусть \mathcal{C} – некоторое подмножество X . Задача о приближении C посредством A состоит в нахождении величины

$$E(C, A, X) = \sup_{x \in C} \ell(x, A, X), \quad (2)$$

где эту величину именуют отклонением C от A ,

– наилучшее приближение заданного множества классом аппроксимирующих множеств. Пусть U – некоторая совокупность аппроксимирующих множеств A . Задача о приближении заключена в поиске величины:

$$\bar{E}(C, U, X) = \inf_{A \in U} E(C, A, X), \quad (3)$$

называемой поперечником и, в частности, N -поперечником по Колмогорову, если U – класс всех линейных многообразий размерности $m \leq N$,

– приближение посредством фиксированного метода приближений. Пусть C и A – подмножества X и оператор $\Lambda : C \rightarrow A$. Задача о приближении заданного множества при помощи фиксированного метода приближений состоит в отыскании значения:

$$G(C, \Lambda, X) = \sup_{x \in C} \rho(x, \Lambda x), \quad (4)$$

– задача о наилучшем методе приближений. Пусть $\mathfrak{L} = \{\Lambda\}$ – некоторая совокупность операторов $\Lambda : C \rightarrow A$. Исследуется величина:

$$\bar{G}(C, \mathfrak{L}, X) = \inf_{\Lambda \in \mathfrak{L}} G(C, \Lambda, X) \quad (5)$$

для последующего выбора соответствующего метода аппроксимации.

Применение методологии аппроксимации заключается в использовании соответствующих процедур решения задач (1)-(5), представляемых двояко: либо в виде (формального) метода (например, интерполяционный метод, методы среднестепенных приближений, методы чебышевского приближения) [3-6], либо в виде процесса повторяющегося использования некоторого (формального) метода аппроксимации (например, интерполяционный процесс Фейера; процесс чебышевских интерполяций (алгоритм Ремеза); интерполяционный процесс акад. С.Н. Бернштейна) [4-9].

Собственно актам применения методов и процессов приближений свойственны некоторые особенности, обусловленные реальностями основной области приложения – описания и формирова-

ния сигналов [10-13]. *Реальная* среда аппроксимации отличается от формальных условий, в которых работает методология теории аппроксимации. Подобно тому, как конечная (машинная) арифметика отличается от своего классического прообраза, реальные процессы аппроксимации – это не совсем формальное воплощение формальных методов и процессов в виду наличия **реальных исходных данных и реальных целей**. Для определенности реальную аппроксимацию (в конкретном приложении) будем называть моделированием нелинейных функций или моделированием нелинейностей.

Реальности исходных данных. Использование традиционных инструментальных средств аппроксимации нелинейных функций как образов реальных сигналов осложняется, прежде всего, реальностями восприятия сигналов:

1) человек «обозревает» сигнал как природное явление, а его поточечный функциональный образ $y = F(x)$ или образ нелинейного преобразования как результат фиксирования всем многообразием органов чувств или средств технического оснащения на *конечном* временном и пространственном промежутке. В этом промежутке фиксируется *ограниченное количество точек* и все измеренные величины ограничены по своему значению: нет бесконечности, нет бесконечных последовательностей, нет возможностей выбора значения *любой точки* промежутка кроме точек полученного (зафиксированного) массива измеренных значений;

2) в измерительных трактах сигналы подвержены нелинейным преобразованиям. Это ведет к изменению их спектрального состава и *фиксированию*, по существу, сигналов *иной структуры* с измененными пропорциями субстанциионных, энергетических и организационных (структурных) компонент, образующих сигнал. Информационная насыщенность мгновенного значения реального сигнала заменяется общей динамикой на конечном промежутке, то есть *формой зафиксированной нелинейной функции* как образа реального сигнала. Ни вещество, ни энергия, ни их структурные отношения, а только форма (образа) становится неким обобщенным носителем и *не расчленяемым* выразителем свойств (содержимого) сигнала;

3) форма воспринимается как *непрерывная функции неизвестного* аналитического описания, заданная *поточечно* (даже тогда, когда на физическом носителе зафиксирована непрерывная кривая). Поточечность *не связывается с определенным законом задания точек*. *Последовательность значений произвольна* в ограниченном объеме массива измеренных (заданных) данных. Массив не может быть увеличен – он таков, как есть;

4) объективность постепенного (*непрерывного*) распространения сигнала и соответственно фиксирования его образа $y = F(x)$ во времени и пространстве приводит к *восприятию сигнала как наращиваемого явления*, агрегатируемого «порциями» (рис. 1) своей формы. Каждая порция – это часть *непрерывной формы* (образа) сигнала за определенную пространственно-временную «единицу». Агрегатирование может представляться как агрегатирование конечного временного и пространственного промежутка, в котором распространяется и воспринимается сигнал. В модельном плане варианты агрегатирования «вперед» от начала к концу (рис. 1), «назад» от конца к началу (рис. 2), «от центра» и т.д. равноценны, поскольку, в конечном итоге, ведут к восприятию и воспроизведению одного и того же сигнала.

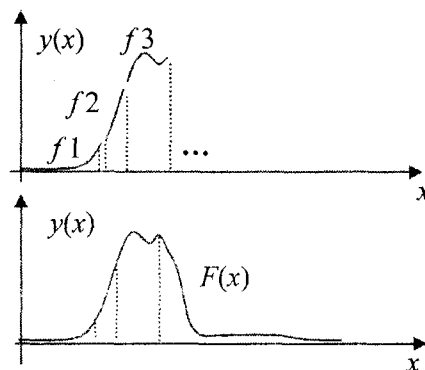


Рис. 1. Наращиваемость сигнала при приеме-передаче, где: $f1$ - первая, $f2$ - вторая, $f3$ - третья порции сигнала; $F(x)$ – «полная» форма сигнала;

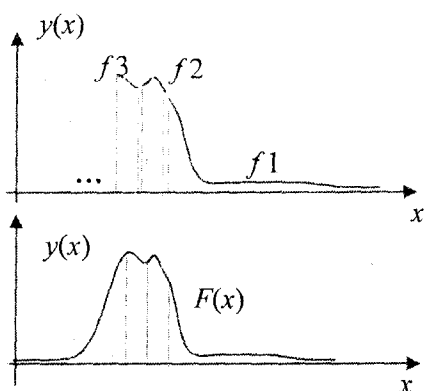


Рис. 2. Модельный вариант наращиваемости сигнала, где: f_1 - первая, f_2 - вторая, f_3 - третья порции сигнала; $F(x)$ - «полная» форма сигнала

Концептуальное представление реальности целей. Целеположение трактуется как то нечто (идея, принцип, концепция, критерий), которое определяет возможности образования (выбора, построения, формирования) целей, адекватных конкретным реальным обстоятельствам [14,15]. Целеположение обуславливается соотношениями (1)-(5), но не выражается ими. Оно представляется критериями оценки качества приближения, то есть оценки того, что достигнутые верхние или нижние грани (1)-(5) удовлетворяют конкретное приложение. В простейшем случае, этими критериями являются процедуры сравнения (1)-(5) с определенными значениями, например:

$$\ell(x, A, X) = \inf_{\xi \in A} \rho(x, \xi) \leq const1, \tag{6}$$

$$E(C, A, X) = \sup_{x \in C} \ell(x, A, X) \leq const2 \text{ и т.д.}$$

Если задача аппроксимации заканчивается определением, например, (1), то проблема моделирования нелинейности (в конкретном приложении) не оканчивается определением этого расстояния. Она будет считаться решенной, если (1) удовлетворит, например, соотношению (6).

При описании сигналов аппроксимация может рассматриваться в двух аспектах: 1) с позиций результатов последующих преобразований сигналов или 2) с позиций непосредственного восприятия (видения) сигнала (и соответствующей функции как его зафиксированного образа). В первом случае последующее преобразование может быть мало чувствительно к изменениям входного сигнала, то есть значительным отклонениям независимой переменной могут соответствовать незначительные изменения функции, что означает, что неадекватность формальной модели (возможные высокие погрешности аппроксимации входного сигнала) могут компенсироваться последующим преобразованием (рис. 3).

Однако преобразования могут иметь и противоположный характер, когда небольшие погрешности аппроксимации входной функции приведут к значительным погрешностям результирующей функций (рис. 4). В практическом плане, во-первых, не всегда априорно известен вид преобразования и, во-вторых, в конкретном приложении возможно образование композиций преобразований, которые не всегда возможно не только определить, но и предугадать их наличие. Поэтому, по-видимому, целесообразнее проводить аппроксимацию с позиций непосредственного восприятия (видения) сигнала и соответствующей функции (элемента $x \in X$) как его зафиксированного образа.

Однако в силу отмеченных реальностей исходных данных в задачах аппроксимации (1)-(5) изначально могут быть неадекватно (задаче аппроксимации) установлены границы A, C, U как подмножеств X и неточно определен собственно элемент $x \in X$, то есть роль элемента x будет играть (в реальности) другой элемент множества. В результате будут получены неадекватные (иные соответствующие реальностям, но не соответствующие исходным целям) нижние и верхние грани (1)-(5), которые объективно будут приняты в качестве решения задачи аппроксимации и которые в зависимости от «степени» адекватности могут представляться различными последовательностями, напри-

мер, нижней грани (1)

$$l(x, A, X) = \inf_{\xi \in A} \rho(x, \xi) : l_1, l_2, \dots, l_i, \dots \quad (7)$$

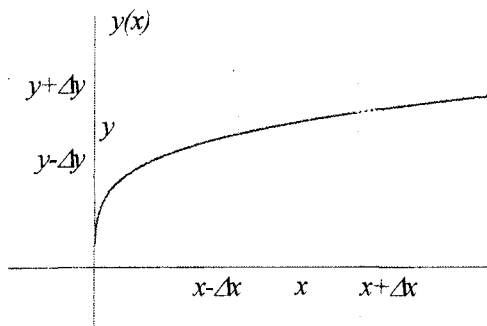


Рис. 3. Пример преобразования входного сигнала, где x – входной сигнал, $y(x)$ – его преобразование

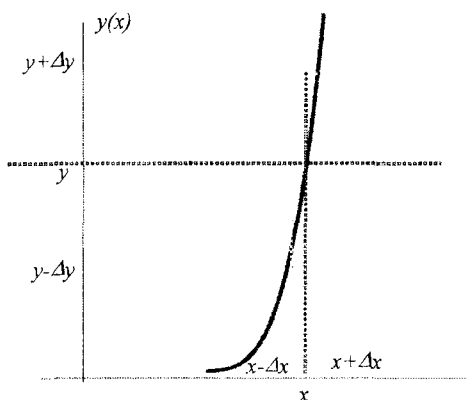


Рис. 4. Преобразование входного сигнала с высокой результирующей погрешностью

Применительно к пространству непрерывных функций (действительного переменного) с нормой максимального отклонения проведенные рассуждения могут быть представлены в следующей логике. Пусть для заданной функции $f(x)$ существуют полиномы наилучшего приближения:

$$P_i(x, x_1^i, x_2^i, x_3^i, \dots, x_{k_i}^i), P_{i+1}(x, x_1^{i+1}, x_2^{i+1}, x_3^{i+1}, \dots, x_{k_{i+1}}^{i+1}), \dots, P_{i+m}(x, x_1^{i+m}, x_2^{i+m}, x_3^{i+m}, \dots, x_{k_{i+m}}^{i+m}), \text{ и т.д.,} \quad (8)$$

где наборы точек: $\{x_1^i, x_2^i, x_3^i, \dots, x_{k_i}^i\}, \{x_1^{i+1}, x_2^{i+1}, x_3^{i+1}, \dots, x_{k_{i+1}}^{i+1}\}, \dots, \{x_1^{i+m}, x_2^{i+m}, x_3^{i+m}, \dots, x_{k_{i+m}}^{i+m}\}, \dots$ – наборы соответствующих узлов аппроксимации ($i, m, k_i, k_{i+1}, \dots, k_{i+m}, \dots$ – натуральные значения).

Пусть погрешности аппроксимации этими полиномами $\varepsilon_i = \varepsilon_i(f(x), P_i(x, x_1^i, x_2^i, x_3^i, \dots, x_{k_i}^i)), \varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i+1}(f(x), P_{i+1}(x, x_1^{i+1}, x_2^{i+1}, x_3^{i+1}, \dots, x_{k_{i+1}}^{i+1})), \dots,$

$$\varepsilon_{i+m} = \varepsilon_{i+m}(f(x), P_{i+m}(x, x_1^{i+m}, x_2^{i+m}, x_3^{i+m}, \dots, x_{k_{i+m}}^{i+m})), \dots \text{ представляются последовательностью:} \quad (9)$$

$$\varepsilon_i \geq \varepsilon_{i+1} \geq \dots \geq \varepsilon_{i+m} \geq \dots$$

В виду невозможности точного представления узлов аппроксимации, в связи с невозможностью выбора любых узлов аппроксимации, невозможностью построения не ограниченных (исходным количеством данных) последовательностей, словом, в виду реальностей исходных данных реально построенные полиномы наилучшего приближения будут отличаться от абстрактно наилучших полиномов (8), а соответствующие погрешности аппроксимации могут произвольно располагаться внутри последовательности (9). То есть *реальный* полином наилучшего приближения, скажем,

$P_i^*(x, x_1^i, x_2^i, x_3^i, \dots, x_k^i)$ может иметь погрешность аппроксимации ε_i^* , которая будет удовлетворять, например, соотношениям:

$$\varepsilon_i \geq \varepsilon_i^* \geq \varepsilon_{i+1} \geq \dots \geq \varepsilon_{i+m} \geq \dots \quad (10)$$

При этом увеличение количества узлов может привести к различным последовательностям реальных погрешностей в сравнении с абстрактными соотношениями, обеспечиваемыми абстрактными полиномами наилучшего приближения (8), например:

$$\varepsilon_i \geq \varepsilon_i^* \geq \varepsilon_{i+1}^* \geq \varepsilon_{i+1} \geq \dots \geq \varepsilon_{i+m} \geq \dots \text{ или } \varepsilon_i \geq \varepsilon_i^* \geq \varepsilon_{i+1} \geq \varepsilon_{i+1}^* \geq \dots \geq \varepsilon_{i+m} \geq \dots \quad (11)$$

и т.д.

Это явление можно концептуально трактовать по-разному и намечать разные пути достижения (8). Однако можно отметить следующее. Сам факт наличия типа (11) показывает, что при *реальной* аппроксимации может существовать несколько аппроксимирующих функций, скажем, обобщенных полиномов, отличных от полинома наилучшего приближения, но удовлетворяющих потребностям моделирования. Поэтому задачу аппроксимации, возможно, целесообразнее ставить не столько как минимаксную задачу, например (1), сколько как задачу поиска *хотя бы одной* подобной аппроксимирующей структуры.

В настоящей работе, исходя из реальности восприятия и существа процессов приближений, обсуждаются некоторые частные проблематичные аспекты применения традиционной методологии аппроксимации и исследуется предназначение и роль интерактивности при организации процесса моделирования нелинейных функций.

1. Возможности традиционной методологии

Разные процедуры решения задач аппроксимации при непосредственном представлении функции заданием способа вычисления и при задании функции совокупностью своих особенностей несколько отличаются друг от друга, но имеют следующие общие формальные основы.

1.1. Задачи аппроксимации при непосредственном представлении функции.

Задача аппроксимации в общем случае традиционно формулируется следующим образом [7, С.9]: задана функция $f(x)$, принадлежащая к некоторому (более или менее обширному) классу (\mathcal{F}). С другой стороны, указан некоторый (более или менее узкий) класс функций (\mathcal{B}). Требуется выделить функцию $P(x)$ класса (\mathcal{B}), которая в каком-то смысле (в каком именно - должно быть указано) возможно мало отличается от данной функции $f(x)$. В зависимости от конкретного класса функции (\mathcal{B}) различают приближения многочленные или полиномиальные, экспоненциальные, периодические и т.д. Виды приближений отличаются по тому смыслу, который вкладывается в понятие близости двух функций. Известны три основных способа аппроксимации: интерполирование, среднестепенные и равномерные приближения.

Интерполирование [3, С.78]. Пусть $y = f(x)$ – вещественная однозначная функция вещественной переменной x , непрерывная в конечном промежутке (a, b) , принимающая в различных точках $a \leq x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \leq b$ соответственно значения $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n$. Пусть аналитическое выражение для функции $f(x)$ неизвестно. Цель интерполяции – найти простейшую непрерывную функцию $\varphi(x)$, принимающую в $n+1$ заданных точках (узлах) интерполирования $a \leq x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \leq b$ данные значения $f(x_\nu) = \varphi(x_\nu)$ ($\nu = 0, 1, \dots, n$) и изображающую в остальных точках $f(x)$ точно или приближенно.

В общем, основной вопрос интерполирования имеет формулировку: даны для дискретных значений x соответствующие y ; ищется приближенная функциональная зависимость между x и y . Искомую функциональную зависимость следует считать отысканной удовлетворительно, если для любого x из промежутка интерполирования:

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad (12)$$

где ε – допустимая предельная абсолютная погрешность.

В общем, интерполяцию следует понимать как проблему построения функции

$\varphi(A_0, A_1, \dots, A_n, x)$, удовлетворяющей условиям:

$$\varphi(A_0, A_1, \dots, A_n, x_i) = f(x_i) \text{ и } |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad (13)$$

где $i = 0, 1, \dots, n$; A_0, A_1, \dots, A_n – параметры. При этом цель считается достигнутой, если найден способ изменения количества параметров (структуры функции) и узлов интерполяции, результатом использования которого является построение функции $\varphi(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, x)$, удовлетворяющей соотношению (13). Вопрос определения способа изменения структуры и построения функции $\varphi(A_0, A_1, \dots, A_n, x)$ в общем случае остается открытым. Однако если она допускает разложение вида:

$$\varphi(A_0, A_1, \dots, A_n, x) = \sum_{i=0}^n A_i \varphi_i(x) \quad (14)$$

по некоторым функциям $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, то проблема построения $\varphi(A_0, A_1, \dots, A_n, x)$ имеет единственное решение при условии, что система функций $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ в рассматриваемом промежутке является Чебышевской, и способ изменения структуры представляет очевидный способ изменения количества слагаемых в разложении (14). То есть, задача построения функции (14) имеет единственное решение на любой системе узлов из заданного промежутка определения $f(x)$, если система функций $\{\varphi_i\}$, ($i = 0, 1, \dots, k$) имеет равный нулю определитель [3]:

$$D \equiv D(x_0, x_1, \dots, x_k) = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_k(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_k(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_k) & \varphi_1(x_k) & \dots & \varphi_k(x_k) \end{vmatrix} \text{ при условии равенства } x_j = x_i \text{ (} j = i \text{)}.$$

При решении интерполяционной задачи по нахождению обобщенного полинома $\varphi(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_j, x)$ основным является *выбор узлов* интерполирования и расчет параметров. Если бы была известна система интерполяционных узлов, на которой достигается заданная погрешность ε , то решение свелось бы к определению \bar{A}_i .

С задачей интерполирования тесно связана проблема построения интерполяционных процессов [3,6,7], решение которой дает возможность построения $\varphi(x)$ для любого ε . В общем эта проблема не решена, но для случая полиномиальной интерполяции известно заключение Д. Фабера [7, С.121]: никакая система узлов не гарантирует сходимости процесса интерполяции для произвольной непрерывной функции. Для каждого конкретного случая необходимо иметь свое множество наборов интерполяционных точек, на которых построенные функции $\varphi^{(i)}(x)$ будут удовлетворять условиям $|f(x) - \varphi^{(i)}(x)| < \varepsilon_i$, где индекс i характеризует номер набора.

Таким образом, проблема построения интерполяционных вычислений сводится к задаче определения узлов интерполяции на каждом i -ом его шаге. Результат решения задачи по определению узлов интерполяции есть таблица значений аргумента и функции.

Равномерные (наилучшие) приближения. Задача наилучшего приближения обычно относится к нормированным пространствам [1,4] и формируется следующим образом. В некотором классе функций R , определенных на некотором множестве Y , задана функция $F(Y)$ и некоторый подкласс $\bar{R} \in R$. Необходимо найти такую функцию $\varphi \in \bar{R}$, для которой достигается $\inf \|F(Y) - \varphi\|$. В качестве нормированного пространства выбирается пространство C – совокупность всех непрерывных функций с нормой: $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, где $X \subset R^m$ (то есть, Евклидову m – мерному пространству). Мно-

жество \bar{R} конструируется из некоторых элементов $\{\varphi_i\}$ $i = 0, 1, \dots, n$ так, что оно будет представлять собой их линейную оболочку:

$$\bar{R} = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i \right\} \left| a_i \in R^1 \right. \quad (15)$$

Иными словами, любой обобщенный многочлен $\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i$ принадлежит \bar{R} .

Если множество X содержит не менее $n+2$ точек, то условия теоремы Хаара являются необходимыми и достаточными для существования единственного обобщенного многочлена, а условия леммы А.Н. Колмогорова – необходимые и достаточные условия того, что данный обобщенный многочлен есть многочлен наилучшего приближения [16].

Когда $X \subset R^1$ известны более удобные для практического использования условия определения многочлена наилучшего приближения. В частности, справедлива обобщенная теорема Чебышева [7]: обобщенный многочлен $\varphi(x)$ является многочленом наилучшего приближения для непрерывной на замкнутом отрезке $G \subset [a, b]$ функции $f(x)$, имеющей не менее $n+2$ точек, тогда и только тогда, когда на $[a, b]$ найдется не менее $n+2$ точек $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$, в которых справедливы равенства:

$$f(x_i) - \varphi(x_i) = (-1)^i \cdot \alpha \cdot \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)|, \text{ причем: } \alpha = 1, \text{ либо } \alpha = -1.$$

Поскольку рассматриваются непрерывные функции неизвестного аналитического вида, то нахождение многочлена наилучшего приближения есть последовательное нахождение $n+2$ точек на которых справедлива обобщенная теорема Чебышева. Очевидно, что необходимость такого нахождения непосредственно следует из условий самой теоремы. Следовательно, выбор $n+2$ точек из непрерывной зависимости $f(x)$ играет основную роль.

Степенные приближения. При проведении степенных приближений используется критерий минимизации интеграла $\int |P(x) - f(x)|^S dx$, $S > 0$. В частности, для постановке средне квадратичной аппроксимации вводится в вещественном пространстве R скалярное произведение – каждой паре векторов $x, y \in R$ поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое через (x, y) и обладающее свойствами: 1) симметричности $(x, y) = (y, x)$; 2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, где λ – действительное число; 3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$; 4) $(x, x) \geq 0$ и обращается в нуль, если только $x = 0$ [17, С. 30]. Нормированное пространство H называется унитарным, если в нем можно ввести скалярное произведение, связанное с нормой соотношением [18, С. 79]: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Полное унитарное пространство именуют гильбертовым пространством.

Задача аппроксимации формулируется как задача нахождения наилучшего приближения в гильбертовом пространстве. Пусть H – гильбертово пространство, f_0 – некоторый его элемент и некоторое множество $F \subset H$. Необходимо найти такой элемент $\bar{f} \in F$, который дает наилучшую аппроксимацию элемента f_0 , то есть: $\|f_0 - \bar{f}\| = \inf_{f_i \in F} \|f_0 - f_i\|$. Справедлива теорема [16]: элемент наилучшего приближения существует и единственен, если F линейная оболочка, образованная линейно независимыми элементами $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ пространства H .

Способ построения элемента наилучшего приближения определяется последовательность действий: $\bar{f} = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots + a_n \varphi_n$ полностью определен, если найдены коэффициенты a_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Для пространства H : $(f(x) - \bar{f}, \varphi_i) = 0$. Тогда: $(f(x), \varphi_i) = (\bar{f}, \varphi_i)$ или, что то же самое:

$$\left. \begin{aligned} a_1(\varphi_1, \varphi_1) + a_2(\varphi_2, \varphi_1) + \dots + a_n(\varphi_n, \varphi_1) &= (f(x), \varphi_1), \\ a_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_2(\varphi_2, \varphi_2) + \dots + a_n(\varphi_n, \varphi_2) &= (f(x), \varphi_2), \\ \dots & \\ a_1(\varphi_1, \varphi_n) + a_2(\varphi_2, \varphi_n) + \dots + a_n(\varphi_n, \varphi_n) &= (f(x), \varphi_n). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Определитель (Грамм) системы (16) в силу линейной независимости φ_i отличен от нуля, поэтому система (16) имеет единственным решением значения коэффициентов a_i . Решение приобретает особенно простой вид, если система функций $\{\varphi_i\}$ ортонормированна. Тогда $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ ($i \neq j$), $(\varphi_i, \varphi_i) = 1$ и $a_i = (f, \varphi_i)$. При этом:

$$\|f_0 - \bar{f}\|^2 = \delta^2 = (f_0, f_0) - a_1(\Phi_1, f_0) - a_2(\Phi_2, f_0) - \dots - a_n(\Phi_n, f_0), \quad \delta = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2}.$$

Описанная конструкция соответствует среднеквадратичному приближению, если в качестве пространства H , выбрано множества функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$, а скалярное произведение функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ задано как

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int_a^b \Phi_1 \cdot \Phi_2 dx. \tag{17}$$

Другими словами, среднеквадратичная аппроксимация – это такое приближение $\bar{f}(x)$, которое минимизирует интеграл: $\int_a^b |f_0(x) - \bar{f}(x)|^2 dx$. Если функция $f_0(x)$ задана таблицей значений и скалярное произведение определено соотношением

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \sum_{i=1}^n \Phi_1(x_i) \cdot \Phi_2(x_i), \tag{18}$$

то этот способ решения именуется **методом наименьших квадратов [19]**.

Среднеквадратичное приближение непрерывной функции неизвестного аналитического вида с использованием скалярного произведения (17) невозможно, поскольку в этом случае не будет определена правая часть системы (16). Поэтому в таком случае необходимо пользоваться соотношением (18), то есть предварительно *выбрать узлы* функции и далее составить уравнения (16) на основе (18). Определив максимальное отклонение $\delta_n^{(i)}$ для одного набора дискретных значений функции, изменяют его таким образом, чтобы на новом наборе отклонение $\delta_n^{(i+1)}$ было меньше $\delta_n^{(i)}$. Построение последовательности $\{\delta^i\}$ есть квадратичная аппроксимация функции неизвестного вида. Существуют также способы построения многочленов наилучших среднеквадратичных приближений, основанные на среднеквадратичной аппроксимации на каждом шаге (Ремез Е.Я., 1960) [5].

1.2. Задачи аппроксимации при представлении функции заданием ее особенностей.

Возможности аппроксимации при описании функции определением ее общих свойств раскрываются формулой Эрмита, формулой проф. В.Л. Гончарова, идеями применения полиномов акад. С.Н. Бернштейна и полиномов акад. П.Л. Чебышева в интерполяционном процессе Фейера (L.Fejèr), а также раскрываются в обобщенных полиномах Лежандра [2,3,7,8,20].

Формула Эрмита. Обобщение интерполяционной задачи, указанное Эрмитом, формулируется в виде требования построения полинома $P(x)$ степени n , принимающего в s различных точках $x_k (k = 1, 2, \dots, s)$ вместе со своими производными порядка $h (h = 0, 1, \dots, \alpha_k - 1)$ данные значения $y_k^{(h)}$:

$$P^{(h)}(x_k) = y_k^{(h)}, h = 0, 1, \dots, \alpha_k - 1, k = 1, 2, \dots, s,$$

причем предполагается, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = n + 1$.

Для построения $P(x)$ используют две идеи:

а) идею представления $P(x)$ структурой:
$$P(x) = \sum_{i=1}^s \left[y_i L_{i0}(x) + y_i^{(1)} L_{i1}(x) + \dots + y_i^{(\alpha_i-1)} L_{i, \alpha_i-1}(x) \right],$$

где полиномы $L_{ik}(x) (i = 1, 2, \dots, s, k = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1)$ степени n удовлетворяют условиям:

$$L_{ik}^{(h)}(x_m) = 0 (m \neq i; h = 0, 1, \dots, \alpha_m - 1) \text{ и } L_{ik}^{(h)}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } h \neq k, \\ 1 & \text{при } h = k \end{cases} (h = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1),$$

б) идею представления полиномов $L_{ik}(x) (i = 1, 2, \dots, s, k = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1)$ в виде:

$$L_{ik}(x) = (x-x_1)^{\alpha_1} \dots (x-x_{i-1})^{\alpha_{i-1}} (x-x_{i+1})^{\alpha_{i+1}} \dots (x-x_s)^{\alpha_s} l_{ik}(x),$$

где $l_{ik}(x)$ – полином степени $n - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + k + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_s) = \alpha_i - k - 1$. Тогда, учитывая, что

$A(x) = \prod_{v=1}^s (x - x_v)^{\alpha_v}$ и $y_k^{(h)}$ - значения соответствующих производных от данной функции $f(x)$ в соответствующих точках, для полинома $P(x)$ выводится интерполяционная формула общего вида, именуемая формулой Эрмита:

$$P(x) = \sum_{i=1}^s \left[\frac{A(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i}} \sum_{k=0}^{\alpha_i-1} y_i^{(k)} \frac{(x-x_i)^k}{k!} \left\{ \frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)} \right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i-k-1)} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^s \left[\frac{A(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i}} \sum_{k=0}^{\alpha_i-1} f^{(k)}(x_i) \frac{(x-x_i)^k}{k!} \left\{ \frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)} \right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i-k-1)} \right].$$

Многочлен проф. В.Л. Гончарова. Полином конструируется для интерполирования последовательными производными, удовлетворяет условиям $P^{(m)}(x_m) = y^{(m)}$ ($m = 0, 1, \dots, n$), где $x_m, y^{(m)} \in \mathbb{R}^1$ и имеет вид:

$$P(x) = y^{(0)} + y^{(1)} \int_{x_0}^x dx' + y^{(2)} \int_{x_0}^x dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' + \dots + y^{(n)} \int_{x_0}^x dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' \dots \int_{x_{n-1}}^{x^{(n-1)}} dx^{(n)}.$$

Пусть $L_0(x) \equiv 1$ и для $m = 0, 1, \dots, n$: $L_m(x) = \int_{x_0}^x dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' \dots \int_{x_{m-1}}^{x^{(m-1)}} dx^{(m)}$, то многочлен $P(x)$ представится

формой $P(x) = \sum_{m=0}^n y^{(m)} L_m(x)$, а с учетом того, что $y^{(m)}$ - значения соответствующих производных

от данной функции $f(x)$ в соответствующих точках, многочлен представится в виде

$$P(f, x) = \sum_{m=0}^n f^{(m)}(x_m) L_m(x).$$

По самому построению формул Эрмита и многочлена Гончарова применимость этих формул определяется решением задачи выбора набора узлов и соответствующей ему последовательности значений производных в узлах этого набора.

Полиномы акад. С.Н. Бернштейна. Бернштейн указал полиномы $B_n(x)$, имеющие в $[0, 1]$ вид

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

как конкретную реализацию полиномов $R_n(x)$ теоремы Вейерштрасса: «Если $f(x)$ непрерывная в сегменте $[a, b]$ функция, то для любого $\epsilon > 0$ найдется многочлен $R_n(x)$ степени n такой, что для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $|f(x) - R_n(x)| < \epsilon$ ». Другими словами, полиномы $B_n(x)$ равномерно и с любой степенью точности аппроксимируют любую функцию из $C[a, b]$. К примечательным особенностям этих полиномов относят:

- малую чувствительность к структурным свойствам приближаемой функции. Полиномы $B_n(x)$ в точках отличия второй производной аппроксимируемой функции от нуля реализуют приближение порядка $1/n$ вне зависимости от структурных характеристик $f(x)$,

- асимптотическое приближение производных. Если $f(x)$ имеет непрерывную производную k -ого порядка $f^{(k)}(x)$, то производные $B_n^{(k)}(x)$ имеют пределом $f^{(k)}(x)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$,

$k = 1, 2, \dots$

Также необходимо отметить принципиально важную структурную особенность - набор узлов аппроксимации должен быть специфичным: он должен иметь равномерное расположение на рабочем промежутке аппроксимации.

Интерполяционный процесс Фейера. L.Fejér показал, как видоизменить интерполяционный процесс, чтобы он стал сходящимся при любой заданной интерполируемой функции. Для этого интерполяционные полиномы $P_{2n-1}(x)$ степени $2n-1$ должны в узлах Чебышева $x_m^{(n)} = \cos \frac{2m-1}{2n} \pi$ совпадать с данной функцией, а первая производная в этих узлах должна обращаться в нуль: $P_{2n-1}(f, x_m^{(n)}) = f(x_m^{(n)})$, $P'_{2n-1}(f, x_m^{(n)}) = f'(x_m^{(n)}) = 0$ при $m = 1, 2, \dots, n$.

Формула для $P_{2n-1}(f, x)$ – это формула Эрмита в случае, когда в качестве узлов определены нули полинома Чебышева $T_n(x)$: $T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)$, $T_n(x) = \cos n \arccos x$, в которых совпадают первые производные аппроксимирующей и приближаемой функций:

$$P_{2n-1}(f, x) = \frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{T_n(x)}{x - x_m^{(n)}} \right)^2 [f(x_m^{(n)})(1 - xx_m^{(n)}) + f'(x_m^{(n)})(1 - (x_m^{(n)})^2)(x - x_m^{(n)})] =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{T_n(x)}{x - x_m^{(n)}} \right)^2 f(x_m^{(n)})(1 - xx_m^{(n)}).$$

Считается, что в процессе Фейера сходимость достигается за счет увеличения вдвое степени интерполирующего полинома. Акад. С.Н. Бернштейн показал, что тот же результат может быть получен при повышении степени для произвольно малого ϵ не более чем в $1 + \epsilon$ раз [7, 20].

Кроме этого надо отметить принципиально важную структурную особенность интерполяционного процесса – набор узлов аппроксимации должен быть специфичным: он должен располагаться в нулях полинома Чебышева (на рабочем промежутке аппроксимации).

Обобщенные полиномы Лежандра. В пространстве L^2 (измеримых на интервале (a, b) функций $f(x)$, квадрат модуля которых интегрируем в смысле Лебега) проводится обобщение квадратичной аппроксимации функции. Допускается, что функция $f(x)$ дифференцируема k раз и ее k -ая производная входит в L^2 . Определяется линейная комбинация $\sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu(x)$, минимизирующая функ-

ционал: $\Omega_{n,s} = \int_a^b \left\{ \sum_{s=0}^k \left[\sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu^{(s)}(x) - f^{(s)}(x) \right]^2 \right\} dx$, то есть определяющая наилучшую аппроксимацию

$f(x)$ и ее производных. Одновременная аппроксимация функции и ее производных построением обобщенных полиномов Лежандра касается случая аппроксимации функции и ее первой производной ($k = 1$) с минимизацией функционала Ω_n с введенным постоянным весом γ :

$$\Omega_n = \int_a^b \left\{ \left[\sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu(x) - f(x) \right]^2 + \gamma \left[\sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi'_\nu(x) - f'(x) \right]^2 \right\} dx.$$

В промежутке $[a, b] \equiv [0, 1]$ на базе линейно независимого множества степеней $\{x^n\}$ строится ортогональная в обобщенном смысле система $\{\varphi_\nu(x)\}$ полиномов $P_n(x)$ для которой:

$$\int_a^b [\varphi_\mu(x) \varphi_\nu(x) + \gamma \varphi'_\mu(x) \varphi'_\nu(x)] dx = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu = \nu, \\ 0 & \text{при } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Построение полиномов $P_n(x)$ способом Гробнера основано на том, что нормированный полином $P_n(x)$ среди всех полиномов степени не выше n реализует решение вариационной задачи:

$$\Omega = \int_0^1 \{y^2 + \gamma(y')^2\} dx = \min$$

при условии $y^{(n)} = c \neq 0$ фиксирующем коэффициенте при старшем члене. Решение приводит к сле-

дующей формуле для обобщенных полиномов Лежандра:

$$P_n(x) = F_n \cdot \frac{D^n}{1 - \gamma \cdot D^2} \left[(x^2 - x)^n - \alpha_n (x^2 - x)^{n-1} \right],$$

где символ D обозначает оператор $\frac{d}{dx}$,

$$F_n = \frac{1}{n!} \sqrt{\frac{n(2n+1)}{n+2(2n+1)\alpha_n}}, \quad \alpha_n = -\frac{\Phi_2(n) + \Phi_3(n)}{\Phi_1(n)},$$

$$\Phi_1(n) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} (n+2m-1)! C_{n-1}^{2m} \gamma^m, \quad \Phi_2(n) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2} \right]} (n+2m-1)! C_{n-1}^{2m-1} \gamma^m,$$

$$\Phi_3(n) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n+1}{2} \right]} (n+2m-1)! C_{n-1}^{2m-2} \gamma^m,$$

символ « $[\xi]$ » – целая часть ξ . При $\gamma = 0$ полиномы $P_n(x)$ переходят в полиномы Лежандра.

1.3. Особенности применения традиционной методологии аппроксимации.

Эффективность инструментальных средств построения моделей нелинейностей определяется составом и методикой (порядком) их применения. При этом наиболее важным фактором является *гарантированная возможность построения подходящей модели в реальных условиях зафиксированных значений нелинейности*. Этому препятствуют несколько принципиальных факторов.

Во-первых, использование традиционных инструментальных средствами аппроксимации при построении моделей нелинейных преобразований осложняется отмеченными выше *реальностями исходных данных*:

- конечностью и ограниченностью поточечного функционального образа; отсутствием бесконечности, бесконечных последовательностей и отсутствием возможностей выбора значения любой точки промежутка кроме точек исходного массива измеренных значений;

- особенностью того, что поточечность не связывается с определенным законом задания точек. Последовательность значений произвольна в ограниченном объеме массива измеренных (заданных) данных. Массив не может быть увеличен – он таков, как есть;

- объективностью постепенного (непрерывного) восприятия сигнала (нелинейности) как нарастающего явления, агрегируемого «порциями» своей формы (по мере его восприятия).

Во-вторых, использование традиционных инструментальных средствами аппроксимации осложняется особенностями формальных методов:

- основанных на выборе узлов аппроксимации, расположенных *специальным* образом (например, равномерно, в нулях полиномов Чебышева и т.п.),

- реализующих асимптотические приближения. Проблематичность использования обусловлена тривиальной причиной *отсутствия* требуемых методами узлов аппроксимации в исходном (не бесконечном) массиве измеренных значений.

В-третьих, использование традиционных инструментальных средствами аппроксимации осложняется особенностями так называемых «*энергетических*» метрик (гильбертовых пространств) при организации степенных приближений. При среднеквадратичной аппроксимации минимизируется

критерий: $\int_a^b |F(x) - \bar{f}(x)|^2 dx$, отражающий энергию ошибки исходного $F(x)$ и аппроксимирующего

$\bar{f}(x)$ сигналов. Но исходный сигнал регистрируется не кривой изменения его энергии, а своей формой, динамикой на конечном промежутке. Форма построенной $\bar{f}(x)$ может разительно отличаться от исходной $F(x)$ наличием значительных «кратковременных всплесков» [Рис. 5] и это характерная особенность степенных приближений. «Энергетическая» близость не обеспечивает совпадение или подобие формы. Такие результаты не гарантируют возможность построения подходящей модели.

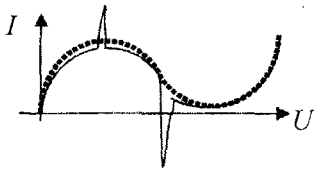


Рис. 5. Пример степенных приближений вольтамперной характеристики электронного прибора $I=I(U)$, где I ток в приборе, U – напряжение на приборе, а сплошная линия обозначает аппроксимирующую функцию

В-четвертых, использование традиционных инструментальных средствами аппроксимации осложняется:

- некоторой неадекватностью постановке задач (1)-(5), предполагающих изначальное наличие всех множеств и исходного элемента аппроксимации,
- определенным несоответствием реальностям того, что нелинейность (как наращиваемое явление) агрегируется (накапливается, составляется) «порциями» своей формы. И задача аппроксимации должна решаться последовательно как для каждой части по мере поступления, так и для всего сформированного фрагмента нелинейной функции.

В-пятых, использование традиционных инструментальных средств аппроксимации осложняется некоторой неадекватностью соотношения цели по построению точного описания нелинейной функции и формализма, определенного метриками и критериями достижения нижних или верхних граней. Критерии и метрики – это материал для промежуточных действий с целью получения нелинейности (описания), имеющей ту же (идентичную) форму, которую имеет функциональный образ исходного сигнала, для дальнейшего использования этого описания в модельных процессах. В конечном итоге, полученное описание нелинейности должно воспроизводить (повторять) форму исходной функции независимо от многообразия способов и приемов, использованных при получении этого описания.

Изложенные суждения дают основания утверждать:

1) при непосредственном представлении нелинейности (заданием способа вычисления) основные сложности определяются задачами: а) поиска узлов интерполяции при интерполировании, б) выбора наборов узлов, на которых справедлива обобщенная теорема Чебышева в случае равномерной аппроксимации, в) выбором узлов приближаемой функции и структуры аппроксимирующей функции при среднеквадратичных приближениях. При задании нелинейности совокупностью своих особенностей, в частности, производных, проблема выбора или поиска узлов затрудняется вопросами выбора последовательности значений производных (в узлах), соответствующих этим узлам.

В целом, не будет заблуждением положение о том, что проблема построения аппроксимирующей функции – это, по существу, проблема поиска или определения узлов исходной функции, на которых реализуются известные соответствующие формальные процедуры расчета параметров;

2) процесс аппроксимации функций неизвестного аналитического вида интерактивен не по формальной постановке и в соответствии с формализмом получения требуемых параметров аппроксимирующей функции, а по существу самого процесса решения задачи. При этом интерактивность представляет собой произвольно, неконтролируемо, стихийно, неорганизованно чередующийся процесс работы человека (для проведения индуктивного вывода или осуществления языковой трансформации) и работы формальной процедуры (для реализации дедуктивного вывода) по установлению (определению, вычислению) параметров аппроксимирующей зависимости. И в этом процессе решения человек исполняет следующие мероприятия:

- выбирает узловые точки; наборы, характеризующие динамику изменения (производные); аппроксимирующее множество и задает структуру аппроксимирующей функции (количество и состав компонент аппроксимирующей формулы); области определения и изменения функции;
- осуществляет выбор и формализацию метрики, критерия оценки близости для оценки адекватности результатов и определяет соответствующий метод приближения;
- инициирует исполнение (запуск) формальной процедуры вычисления параметров аппроксимирующей зависимости;
- неоднократно исполняет сформулированные выше положения, пока либо не достигнет требуемого качества аппроксимации, либо не сделает иное заключение в соответствии с характером

исследования.

Таким образом, оценивая факторы, влияющие на продуктивность процессов аппроксимации, можно сделать следующее заключение: эффективность процессов решения задач аппроксимации обуславливается организацией *интерактивного* взаимодействия формального и экспертного, дедуктивного и «индуктивного» вывода, вычислительных процедур (ЭВМ) и человека.

2. Системный механизм интерактивности

Как правило, исследование явлений объективной реальности обуславливается многими этапами. Выбором концептуальных воззрений и объектных моделей. Моделированием и получением модельных знаний. Осуществлением акта переноса модельных знаний в плоскость реальности. Основные трудности при получении знаний заключаются в построении и реализации подходящих процессов концептуального и языкового моделирования. Известна существенно важная характеристика такого моделирования. Это – наличие многократно повторяющихся процедур «экспертного» оценивания как результатов моделирования, так и существа всех компонент моделирующих сред. Экспертное оценивание имеет лингвистическую (семиотическую) форму представления (природу) и неформальный характер интерпретации (осмысливания). Оно может проводиться индивидуально или группой специалистов-экспертов.

Факт необходимости систематического участия человека в моделирующих процессах на любом уровне их языкового или технического воплощения является принципиально важным. Без участия человека сомнительна достижимость целостности моделирующих процессов, приводящих к знаниям об исследуемом явлении. Суть процессов моделирования нелинейных функций выделяется особенно рельефно, если рассматривать процессы моделирования нелинейностей как образы процессов моделирования сигналов. Так потребность участия человека в деятельности по моделированию сигналов обуславливается повторяемостью следующих характерных для этого процессов.

Конструирования концептуальной модели по методу описания входного сигнала; по методу описания структуры аппроксимирующей функции. Создания объектных моделей по структуре входного сигнала в связи с вариацией характерных точек (узлов «интерполяции») и наборов, отражающих динамику сигнала (совокупностей производных); в связи со сменой областей определения или изменения входного сигнала; в виду изменения критериев близости. Создания или выбора инструментальных средств по изменению количества или состава компонент аппроксимирующей формулы (структуры объектной модели) и так далее.

Повторяемость в виде многократно исполняемых процедур и реализуемых процессов при иницирующей роли человека-исследователя представляется в различном виде. Возможно многократное повторение одной и той же деятельности отдельным индивидуумом. Однако, начиная с определенного момента, человек бессознательно сопротивляется рутине повторяемости. Им управляют не столько творческие мотивы, сколько волевые акты необходимости. Обычно, повторение вызывает внутренний диалог, направленный на оценку возможностей изменения существующего порядка действий с целью сокращения объема работы и получения удовольствия от выполняемого труда.

Возможно небольшое повторение той же деятельности одним человеком, но многократное в масштабах сообщества. Такому многократному повторению также характерны отмеченные черты. Но здесь возникают и внешние связи (диалоги) между индивидуумами. Нельзя не согласиться с тем, что и внешние диалоги тоже направлены на ликвидацию рутинности удачными способами организации дела, техническими средствами, частичной или полной формализацией процедур и т.д.

Повторяемость может характеризоваться многообразием действий, допускающих автоматическую реализацию без участия человека, но при его наблюдающей (оценивающей, направляющей, прекращающей и т.п.) роли в исполняемом автоматикой процессе. Не исключено многообразие действий, допускающих частичное техническое воплощение, то есть при обязательном участии человека в соответствующем объеме работы и соответствующей интенсивности. В целом, повторяемость – это признак реальности существования объекта автоматизации и, в частности, *автоматизации именно процесса повторяемости*.

Можно утверждать, что повторяемость в «ручной» деятельности трансформируется посредством автоматизации в интерактивность автоматизированных процессов. Интерактивность указывает на особую роль человека-участника. Автоматизация переводит повторяемость в подходящую форму «периодического» взаимодействия (диалога), прежде всего, человека и технических средств. Вероятно

но, совершенной формой такого взаимодействия будет определенная интеллектуальная коммуникация по взаимным запросам в соответствующих информационных технологиях.

Традиционно проблематика моделирования сигналов в обобщенном виде представляется следующими вопросами. Во-первых, формирование концептуальных воззрений об изучаемом множестве сигналов в определенной языковой форме. То есть установление метода понимания множества реальных сигналов, соответствующего ему способа их восприятия (фиксирования, измерения, сохранения) и адекватной методики трактовки результатов восприятия сигналов и процессов, связанных с их воспроизведением. Другими словами, это, прежде всего, вопросы построения и выбора концептуальной модели.

Во-вторых, создание «подходящих» лингвистических образов воспринимаемых сигналов с позиций сформированной концептуальности и в границах представлений о тех структурах управления, для которых проводится моделирование. В-третьих, построение и использование конкретных объектных моделей. Сюда включаются, обычно, задачи перевода лингвистических образов в формальные языковые конструкции, реализации процессов формального и технического воспроизведения сигналов и использования объектных моделей в соответствующих структурах управления.

Несомненно, что в целом эффективность моделирования принципиально обуславливается адекватностью концептуальной модели содержанию (природе, энергии, организации) сигналов (как прообразов моделируемых нелинейностей) в естественных условиях их существования. Поэтому реальное моделирование сигналов – это неоднократная реализация человеком цепочки «концептуальная модель – лингвистический образ – объектная модель» для достижения удовлетворительной степени адекватности между проявлениями реальных сигналов и результатами формального и технического воспроизведения сигналов в соответствующих структурах управления.

Таким образом, потребность систематического участия человека, по сути, заложена в самой организации процесса моделирования сигналов. Она выражается интерактивной формой взаимодействия, определяющей диалоговость структуры процесса и разделение функций между человеком и процессами формального вывода или человеком и технически воплощенными информационными технологиями для оценки достигнутой степени адекватности.

Практика показывает, что реальная оценка адекватности и всех компонент цепочки «концептуальная модель – лингвистический образ – объектная модель» возможна лишь после осуществления перевода лингвистических образов в формальные языковые конструкции и реализации формального воспроизведения (восстановления) сигналов. Такие процедуры называют аппроксимацией или приближением функций. Именно эти процессы составляют наиболее ответственную часть всей практической деятельности при моделировании сигналов.

В связи с этим, следует ожидать, что *интерактивность при организации процедур аппроксимации может и должна играть наиболее существенную роль во всей структуре процесса моделирования*. Ретроспективно, от первой задачи приближения (Чебышев П.Л., 1854 [19, С.23-51]) до современных общепризнанных положений теории [1,2,8] аппроксимация не рассматривается как интерактивный процесс. Как правило, вначале уточняются вопросы об узлах, классах приближающих функций, критериях согласия и точности, а затем отрабатывается формальная процедура установления аппроксимирующей зависимости.

По-видимому, впервые целесообразность наделяния процесса приближений интерактивными свойствами отметил R.W.Hamming (Хемминг Р.В., 1962): «Здравая вычислительная практика требует постоянного исследования изучаемой задачи не только перед организацией вычисления, но также в процессе его развития и особенно на той стадии, когда полученные числа переводятся обратно и истолковываются на языке первоначальной задачи» [6, С.99].

Классические методы (интерполирование, квадратичные, среднестепенные, равномерные приближения) требуют предварительной формализации таких процедур, которые человек представляет более в интуитивном, чем в языковом плане. Психофизиологический образ реального входного сигнала принципиально адекватно не представим лингвистическими конструкциями (семиотическими моделями). Адекватный перевод лингвистических образов в формальные языковые конструкции, вероятнее всего, не только принципиально, но и методологически невозможен. В плане языкового выражения человек не знает, что такое адекватность в отношении того, как он «ощущает» внешнюю среду.

Все, что «видит» человек всем многообразием органов чувств и технического оснащения

включая психический акт осмысления и осознания при наблюдении сигнала принципиально не формализуемо. Поэтому объяснимо желание использования тривиальной мысли о разделении функций между человеком и формальными построениями при аппроксимации сигналов, между человеком и автоматикой при техническом воплощении процессов аппроксимации. Возможно, при этом *единственной целью будет потребность совпадения того, что получается при аппроксимации с тем, что представляется (мыслится, ощущается) человеком в виде образа входного сигнала.*

Человеку целесообразнее делать выбор самому, чем строить для этого некие формальные «эквиваленты» процесса принятия им решений, внося тем самым не компенсируемые и неконтролируемые погрешности. Человек адекватнее (точнее и лучше) оценит не выражаемые интуитивные представления о близости приближения и качестве восстановления сигналов. Интерактивность для этого можно организовывать по-разному. Формализация может охватывать большую часть аппроксимирующих процедур, сводиться лишь к простейшим алгоритмам и т.д.

На человека можно возложить оценку близости, выбор узловых точек, задание структуры аппроксимирующей функции; вариацию наборов, характеризующих динамику изменения сигнала (то есть производных); изменение области определения или области изменения входного сигнала; изменение количества или состава компонент формулы, варьирование точности параметров с целью наблюдения тенденции изменения погрешности приближения и т.д. Тогда процесс моделирования сигналов представится как диалоговый процесс многократной аппроксимации, а его техническое воплощение как интерактивная автоматизированная система.

Заключение

Необходимость, потребности, целесообразность изменения, сочетания или организации композиций различных методов, границы структурных единиц моделей и процессов определяются объективными обстоятельствами. Применимость и возможности методологии также как и инструментария, в целом, зависят от реальностей прикладных вопросов. Инструментальные средства эффективны тогда, когда предопределяют и обеспечивают адекватность модельных процессов проявлениям реального мира.

Моделирование сигналов – это компромисс между способами восприятия (фиксирования: измерения и сохранения) сигнала, семиотическими формами его представления, способами конструирования аппроксимирующих функций и критериями близости. В простейшем случае можно говорить о моделировании как о построении описания на некотором формальном языке для поточечного функционального образа $F(x)$ сигнала и осуществлении технической имитации построенного описания (например, радиоэлектронными цепями). Вопросы описания сигналов сводятся к аппроксимации зафиксированных табличных или графических числовых данных некоторыми функциональными зависимостями. Аппроксимация проводится функциями, структура которых специфична и определена природой тех реальных процессов, которые порождают сигнал, или линейными оболочками различных базисных функций в функциональных пространствах. Реальности восприятия позволяют сформулировать следующую *концептуальную модель* для выделения объекта исследования:

1) исходя из основополагаемости формы сигнала возможно не отягощать процесс построения подходящей аппроксимирующей функции структурными особенностями исходной нелинейности (сигнала) и специфичностью природы тех процессов, которые порождают сигнал,

2) оценить степень «близости» (адекватности) формы нелинейности (сигнала) форме аппроксимирующей функции способен только человек интуитивно или своими ощущениями (*визуально, слуховыми, тактильными и т.п.*). «Подобие» (совпадение) формы поточечного функционального образа и формы аппроксимирующей функции – *единственный естественный* критерий оценки близости. Полученное описание должно повторять форму исходной функции,

3) при моделировании процессов управления важную роль может играть не столько сама непрерывность, сколько возможности многократной дифференцируемости. Если аппроксимирующая функция не имеет таких особенностей, то при использовании непрерывных моделей, например, дифференциальных уравнений, это может привести к затруднениям при организации процессов моделирования, при трактовке результатов и их использовании в целях управления,

4) «базисные» функции, из которых составляется аппроксимирующая функция, должны отображать порции, накапливаемые кусочки формы сигнала. В общей структуре аппроксимирующей функции базисная функция должна выражать *существо своей зафиксированной части от всей фор-*

мы моделируемой нелинейности (сигнала),

5) моделирование нелинейности (сигнала) как процесс построения описания на некотором формальном языке – это многократная аппроксимация, это последовательность аппроксимирующих функций, формируемых по мере поступления сигнала в конечном временном и пространственном промежутке,

б) интерактивность в процессах аппроксимации должна иметь отношение не столько к автоматизации, включая процессы формализации, сколько относиться к существу используемого метода аппроксимации и процесса аппроксимации, в целом. Интерактивность должна являться не свойством быть произвольно чередующимся процессом работы человека и работы формальной процедуры, а выражать суть организованного и целенаправленного процесса моделирования нелинейностей для получения требуемого качества моделирования.

Сформулированные положения определяют содержательность того, как понимать процесс построения аппроксимирующей функции и как трактовать результаты преобразований в этом процессе. Поэтому эти шесть пунктов концептуальной позиции можно называть *концептуальной моделью*. Исходя из *концептуальной модели*, объект исследования определяется приемами, порядком действий, средствами выбора узловых точек; средствами задания наборов производных; конструирования структур аппроксимирующих функций (количества и состава компонент формулы); выбора областей определения и изменения функции; приемами и порядком исполнения формальной процедуры вычисления параметров и т. д. Другими словами, *объект исследования при моделировании нелинейностей* – это инструментальные средства оценки и организации диалога с ЭВМ для достижения требуемого качества приближения.

Проведенный анализ и полученные оценки состояния вопроса моделирования нелинейностей показывают, что для построения аналитических моделей нелинейных функций необходимо создание методологии *интерактивной аппроксимации* (приближения).

Первоначальные задачи исследования определяются сформулированной целью создания методологии *интерактивной аппроксимации* в границах содержания объекта исследования и представляются: 1) вопросами определения методики формирования структуры аппроксимирующей функции, 2) вопросами построения базисных функций, и 3) вопросами выработки тактики проведения интерактивного процесса приближения.

Список литературы

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – 2-е изд. – М.: Наука, 1965 – 408 с.
2. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976. – 304 с.
3. Микеладзе Ш.Е. Численные методы математического анализа. – М.: Гос. изд. тех.-теоретич. лит., 1953. – 528 с.
4. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. – Киев: Наукова думка, 1969. – 260 с.
5. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей / Под ред. Вапника В.Н. – М.: Наука, 1984. – 815 с.
6. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров: Пер. с англ. / Под ред. Р.С. Гутера. – 2-е изд. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
7. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. – 2-е изд. – М.: Гос. изд. тех.-теоретич. лит., 1954 – 328 с.
8. Этерман И.И. Аппроксимативные методы в прикладной математике. – Пенза: Пензенский политехнический институт, 1973. – 264 с.
9. Берман Д.Л. Об одном интерполяционном процессе акад. С.Н. Бернштейна // Доклады Акад. Наук СССР, 1948. – Т.60. – №3. – С. 333-336.
10. Варакин Л.Е. Теория сложных сигналов. – М.: Сов. радио, 1970. – 376 с.
11. Френкс Л. Теория сигналов. – М.: Сов. радио, 1974. – 315 с.
12. Айзинов М.М. Избранные вопросы теории сигналов и теории цепей. – М.: Связь, 1971. – 241 с.
13. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
14. Яценко А.И. Целеполагание и идеалы. – К.: Наукова Думка, 1977.
15. Константинов И.С., Веригин А.Н., Раков В.И. Лингвистическое прогнозирование в структурах управления. – С-Пб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 1998. – 165 с.
16. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Наука, 1966. – Т.1. – 389 с.

17. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1966. – 416 с.
 18. Канторович Л.В., Акимов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.: ФМ, 1959. – 342 с.
 19. Чебышев П.Л. Полное собрание сочинений. – М.; Л.: Изд. АН СССР, 1947. – Т. II: Математический анализ. – 520 с.
 20. Бернштейн С.Н. Об одном видоизменении интерполяционной формулы Лагранжа // Собрание сочинений: Конструктивная теория функций. – М.: Изд. АН СССР, 1954. – Т. 2. – С. 130-140.

УДК 004.514

Соломахин А.Г., студент

(Орловский государственный технический университет)

г. Орел, тел. (4862) 761910; e-mail: sgp@ufps.orel.ru; rakov2000@hotmail.ru

ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ИНЖЕНЕРНОЙ МЕТОДИКИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКЕ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

Предложены программные средства интерполяции для описания нелинейностей.

Известны разные программные продукты, позволяющие организовать моделирование нелинейных характеристик [1-3]. Все они, практически, преследуют примерно одинаковые цели: предоставить пользователю как можно больший набор возможностей по проведению процессов аппроксимации с использованием идеи визуализации [4]. Однако ориентироваться в многообразии методов и подходов к построению аналитических описаний нелинейных функций – далеко не простая задача не только в технических приложениях [5].

Для возможности формулирования подходящих требований к вычислительному эксперименту по поиску конкретного описания нелинейности необходимо некоторое начальное представление динамики изменения нелинейности, начальное понимание реальных возможностей использования простейших функций, необходим определенный навык применения традиционных средств приближения и, наконец, необходимо некоторое умение взаимодействовать и организовывать требуемые процессы моделирования [6].

Несмотря на явные достоинства мощных систем моделирования, в целом, на этапе начальной подготовки (осознания) вычислительных экспериментов более продуктивно наличие и использование простых и гибких программных средств инженерного исследования, позволяющих сформировать общее представление о проблеме моделирования конкретной нелинейной функции, сформулировать особенности и установить основные трудности этого процесса.

В работе предложена программная система, реализующая интерполяционную формулу Лагранжа [7,8]:

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f(x_j) \cdot \frac{\prod_{i=1, i \neq j}^{n+1} (x - x_i)}{\prod_{i=1, i \neq j}^{n+1} (x_j - x_i)}$$

и позволяющая организовать упрощенные информационные технологии предварительного построения аналитических описаний.

1. Общая характеристика

Программная система позволяет по заданному набору данных, описывающему некоторую нелинейность, подобрать полиномиальную непрерывную функцию, которая принимает в заданных точках (узлах) интерполирования данные значения, и изображающую в остальных точках точно или

приближенно. Программа обладает следующими характерными особенностями: 1) наличие возможности ввода и редактирования массива данных, характеризующего исходную нелинейность; 2) наличие возможности визуального наблюдения (графического отображения) исходной зависимости; 3) возможность одновременного визуального наблюдения исходной и аппроксимирующей функций, а также графика ошибки; 4) осуществление последовательного процесса испытания сформулированной аппроксимирующей функции на близость к исходной зависимости и другие.

Программная оболочка реализует три основные функции: проектирования, моделирования и документирования. При проектировании осуществляется ввод и редактирование массива данных. В процессе моделирования осуществляется подбор аппроксимирующей кривой путем включения или исключения узлов, участвующих в построении интерполяционного полинома. Документирование отражает результаты работы программы при проектировании и моделировании с возможностью их сохранения в специально организованный файл.

2. Структура программы

В программе можно выделить две основные части [Рис. 1]: ядро и пользовательский интерфейс. Ядро реализует основную функциональность. При написании программы использовался принцип модульного программирования [9,10]. Ядро вместе с пользовательским интерфейсом разделено на модули, которые связаны между собой.

Ядро программы. Ядро программы можно разделить на четыре блока:

– проектирование. За выполнение этого блока отвечает модуль Main. На данном этапе осуществляется непосредственный ввод данных, а также выполняется проверка их корректности (не допускается ввод точек с одинаковой координатой X) и по возможности корректировка (например, если пользователь в качестве разделителя целой и дробной частей числа вместо «.» введет «/», «<», «>»). Кроме того, имеется возможность их редактирования и удаления. После ввода точки заносятся в таблицу;

– моделирование. После того, как массив точек будет сформирован, начинается процесс моделирования. На этом этапе осуществляется подбор аппроксимирующей кривой, путем добавления новых узлов или исключения до тех пор, пока погрешности в точках исходной кривой будут минимальными или их не будет вообще. Все результаты моделирования отображаются на графике. За выполнение данного блока отвечает модуль Lib;

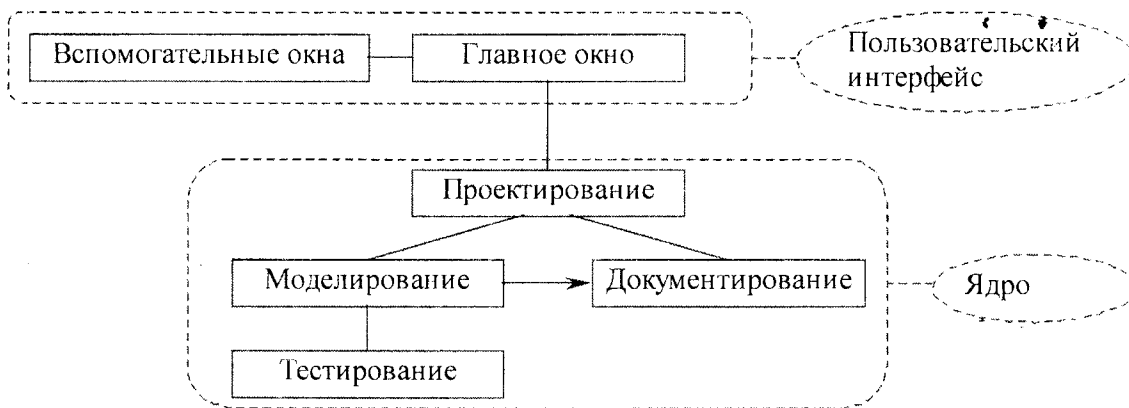


Рис. 1. Структурные части программы

– тестирование. После построения аппроксимирующей кривой (ее поведение схоже с исходной кривой и погрешности в узлах минимальны), возникает вопрос, а правильно ли построен полином? В данной программе имеется такая возможность проверки (модуль Test). При выборе пункта меню Сервис→Тест появляется окно «Проверка» [Рис. 2]. В поле ввода требуется ввести значение координаты X, после чего будет вычислено значение полинома в заданной точке. При правильном построении интерполяционного полинома рассчитанное значение должно совпасть с исходным;

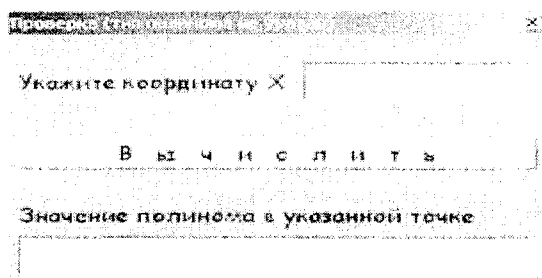


Рис. 2. Окно «Проверка»

– документирование. Данный блок позволяет сохранить результаты моделирования в отдельный файл.

Пользовательский интерфейс. Программа имеет одно основное окно и несколько вспомогательных.

Основное окно содержит главное меню, таблицу для отображения массива данных и область вывода графиков функций. Таблица состоит из четырех столбцов: *Координата X*, *Координата Y*, *Признак участия узла* в построении интерполяционного полинома (Вкл – участвует, Выкл – не участвует), *Значение ошибки* (отклонение аппроксимирующей кривой от исходной).

Среди вспомогательных окон можно выделить следующие:

– окно «Настройки» [Рис. 3]. Появляется при выборе пункта меню *Настройки*. Здесь можно выбрать опции, отвечающие за соединение точек линией, вывод координат курсора, ввод точек при помощи мыши и другие, а также указать тип полинома, который будет использоваться в процессе интерполяции (полином Лагранжа, полином Ньютона или не строить);

– окно для аналитического задания функции [Рис. 4]. Появляется при выборе пункта меню **Правка** → **Аналитический ввод**. Здесь необходимо ввести формулу, указать интервал, на котором будет построена исходная кривая, а затем шаг или задать число точек на интервале. Т.е. вместо ввода всего массива данных, достаточно задать функцию аналитически. Однако особую сложность представляет проверка корректности введенной формулы. Данную проблему решает модуль *Recognition*. Если формула окажется неверной, то будет выдано соответствующее сообщение. Поддерживаются следующие классы функции: *sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, abstuu | |), ln, lg, log, exp*;

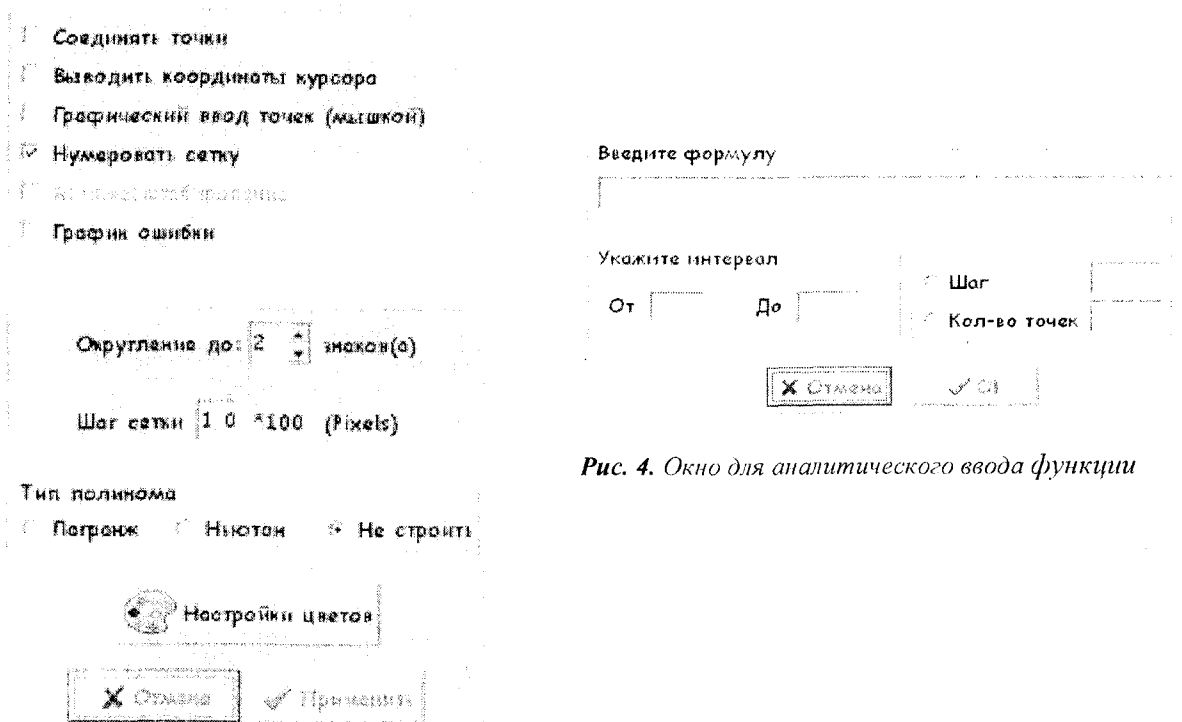


Рис. 3. Окно «Настройки»

Рис. 4. Окно для аналитического ввода функции

– окно «Полином». Появляется при выборе пункта меню Сервис→Посмотреть полином. В данном окне отображается формула интерполяционного полинома.

3. Пример организации процесса моделирования

Структура предложенной программы реализована в экспериментальном программном продукте TR1.exe. Программа работает на платформе IBM PC под управлением операционной системы Microsoft Windows и особо не требовательна к ресурсам компьютера. Для ее работы необходима SVGA-совместимая видеокарта, которая поддерживает разрешение 1024×768 точек и 256 цветов. Программа выполнена в стиле стандартного оконного Windows- приложения [11] и обладает простым и удобным пользовательским интерфейсом. Данная программа реализует файловые операции над файлами проектов с использованием стандартных диалогов, данные представляются в виде таблицы. Она имеет понятный в освоении интерфейс, встроенную контекстную справку для всех элементов управления. Эти особенности позволяют предельно упростить управление программой и уменьшить время овладения всеми возможностями программы неподготовленным пользователям.

4. Порядок работы

Построение аналитического описания функции начинается с ввода массива данных. Для того чтобы начать ввод, необходимо выбрать пункт меню **Правка→Добавить точку**. После этого появится окно [Рис. 5], куда вводятся координаты x и y .

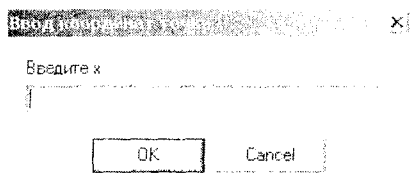


Рис. 5. Окно для ввода координат точки

По умолчанию точка не участвует в построении интерполяционного полинома. Если координаты точки были введены корректно, то она отобразится на графике. Красный цвет точки говорит о том, что она участвует в построении полинома, зеленый – не участвует. Данная программа позволяет редактировать координаты и удалять точки. Для редактирования необходимо указать нужную координату, и по двойному щелчку левой кнопки мыши (или по нажатию клавиши «Пробел», или при выборе пункта меню **Правка→Редактировать**) появится окно, в которое надо ввести новое значение координаты. Чтобы удалить выбранную точку необходимо выбрать пункт меню **Правка→Удалить точку** или нажать клавишу «Backspace». Все действия пользователя фиксируются и при необходимости можно вернуться на шаг назад.

После того как массив данных будет сформирован [Рис. 6.], в окне «Настройки» следует выбрать тип интерполяционного полинома (полином Лагранжа или Ньютона). Кроме этого здесь можно включить следующие опции: соединение точек линиями, вывод координат курсора, графического ввода точек (мышкой), построение графика ошибки, а также изменить шаг сетки и настроить цвета. После того как будет выбран тип полинома, начинается интерактивный процесс построения аппроксимирующей кривой путем добавления или исключения узлов. Добавить узел в построение интерполяционного полинома можно 2 способами:

1) Найти соответствующую точку в массиве данных и двойным щелчком левой кнопки мыши изменить значение в столбце **Вкл/Выкл**, причем значение **Выкл** меняется на **Вкл**, и наоборот.

2) По нажатию правой кнопки мыши на соответствующую точку на графике появляется всплывающее меню. При выборе пункта **Использовать точку** точка включается в построение полинома, а при выборе пункта **Не использовать точку** – исключается.

В столбце **Ошибка** для каждой точки содержится разница между ее координатой y и значением полинома в ней. В конце вычисляется суммарная погрешность (сумма отклонений во всех точках). Процесс добавления/исключения узлов продолжается до тех пор, пока суммарная погрешность не станет минимальной [Рис. 7].

Сам полином можно посмотреть, выбрав пункт меню **Сервис→Посмотреть полином**.

Пункт меню **Сервис→Тест** отвечает за проверку правильности построения полинома. В поле ввода указывается значение координаты x , а по нажатию на кнопку «Вычислить» выдается значение полинома в указанной точке.

Также имеются возможности сохранения результатов работы (Файл→Сохранить результат) и документации (Файл→Документация).

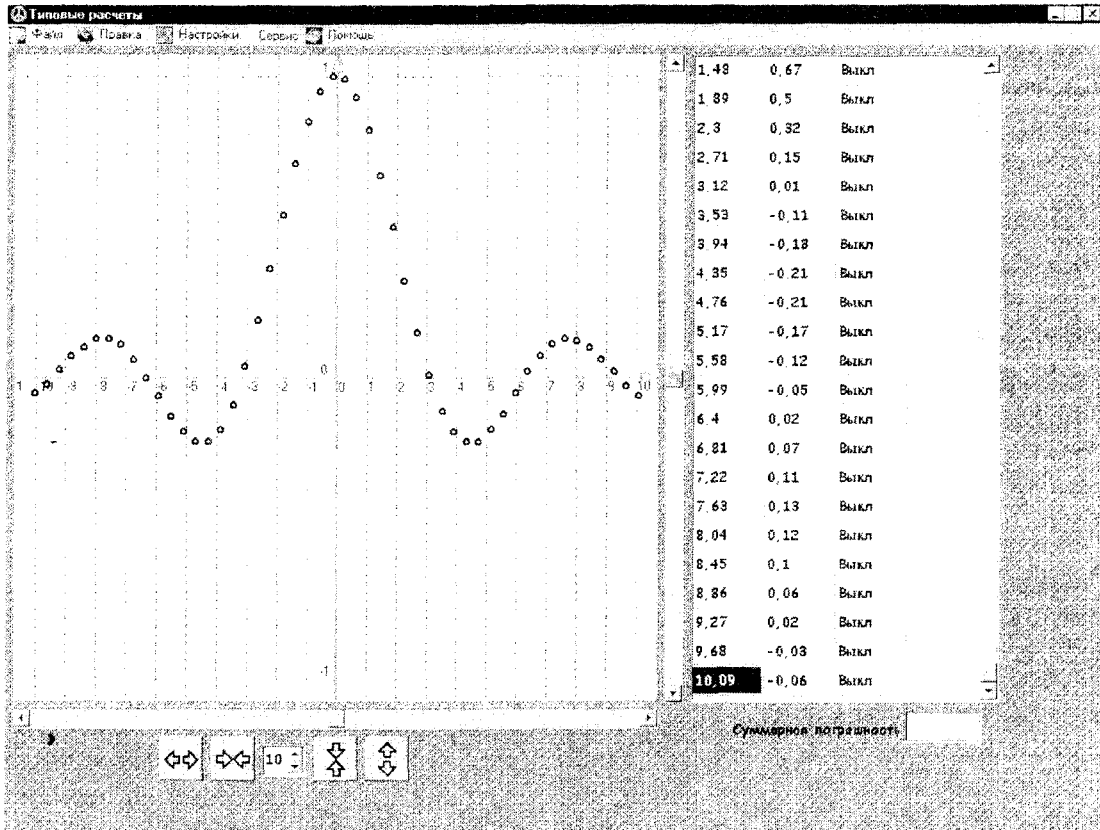


Рис. 6. Результат формирования массива данных

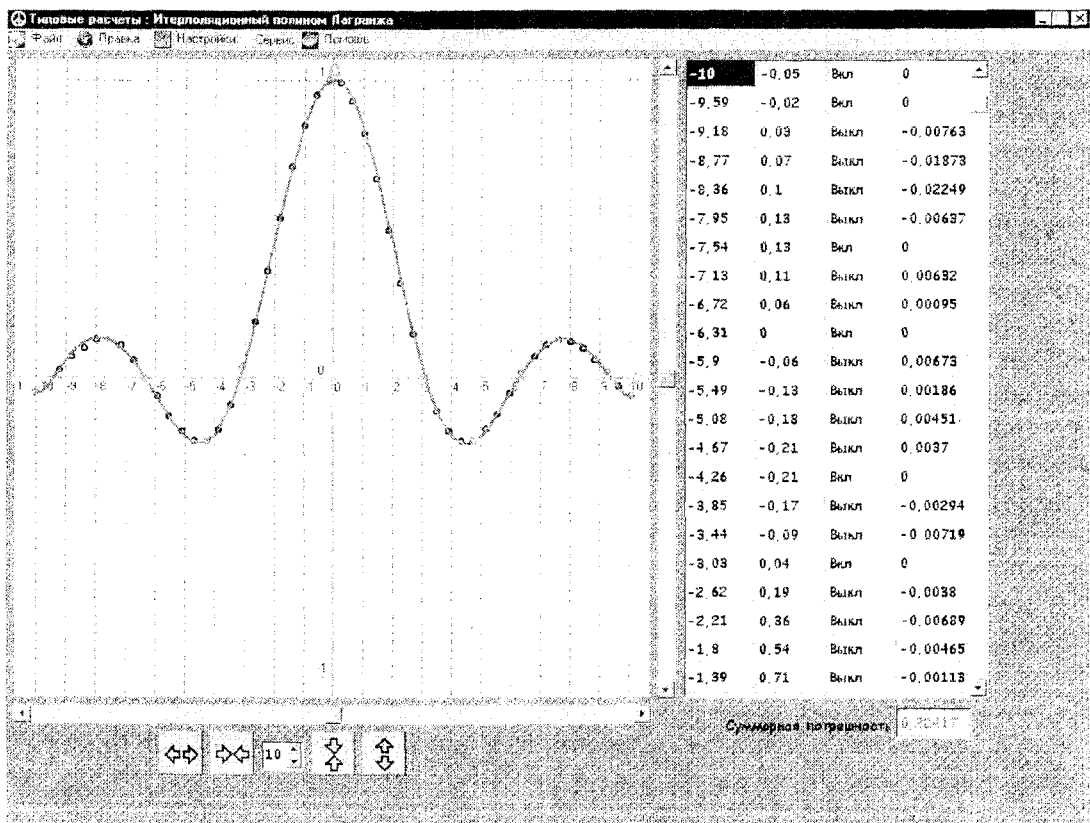


Рис. 7. Построение аппроксимирующей кривой

Выводы

Как показали эксперименты, к недостаткам средств относится не совсем удачное решение вопросов масштабирования и небогатый набор функций при аналитическом вводе. Такая ситуация в известной мере ориентирует средства на определенные виды нелинейностей.

Оценивая возможности использования предложенных программных средств в целом, можно говорить об их наглядности отображения процесса построения аналитических моделей и простоте использования, что позволяет сформировать достаточные начальные представления о динамике изменения нелинейности и получить навык в интерактивном построении аналитических описаний.

Список литературы

1. Дьяконов В.П. MATLAB: учебный курс. – СПб: Питер, 2001. – 560 с.
2. Дьяконов В.П. Mathcad 8/2000: Специальный справочник. – СПб: Питер, 2001. – 592 с.
3. Дьяконов В.П.. Maple 6. Учебный курс. - СПб.: Питер, 2001. – 608 с.
4. Гультаев А. Визуальное моделирование в среде MATLAB. – Спб.: Питер, 2001. – 432 с.
5. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – 2-е изд. – М.: Наука, 1965 – 408 с.
6. Раков В.И. Вывод интерполяционной формулы для полиномиальных моделей имитации нелинейностей. // Известия Орловского государственного технического университета. – Орел: ОрелГТУ. – Серия: Естественные науки. – №3-4. – 2003. – С. 2-20.
7. Соломахин А.Г. Типовые расчеты по дисциплине «Вычислительная математика»: отчет // Кафедра Информационных систем факультета электроники и приборостроения. Рук. к.т.н. Раков В.И.. – Орел: гос.тех.ун-т, 2004. – 7 с.
8. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров: Пер. с англ. / Под ред. Р.С. Гутера. – 2-е изд. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
9. Бозм Б. Инженерное проектирование программного обеспечения. – М.: Радио и связь, 1985. – 140 с.
10. Буч Г. Объектно-ориентированное проектирование. – М.: Радио и связь, 1993. – 443 с.
11. Федоров А. Создание Windows- приложений в среде Delphi. – М.: Компьютер Пресс, 1995. – 288 с.

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.6

Бочков П.В., старший научный сотрудник научно-исследовательского отдела
(Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации)
г. Орел, тел. (4862) 419914

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ РАЗМЕЩЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ В ЛОКАЛЬНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЕТИ

The article reviews (principles of choice of) methods of information resources allocation and their illegal access protection organization on basis of realized in the network operation system access distribution mechanisms to them with vectorial optimization criterion solving problems.

In accordance with criterion function kind and pattern, its parameters and restrictions algorithm of choice of mathematical methods of solving extremum problem.

Опыт создания и эксплуатации корпоративных информационных систем крупных государственных и коммерческих организаций показывает, что на современном этапе развития информационных и телекоммуникационных технологий такая система может быть эффективной только в том случае, если она синтезирована на основе сочетания различных технологий, обеспечивающих оперативный и безопасный доступ пользователей к информационным ресурсам (ИР) [1–5].

На практике в задачах обеспечения оперативности доступа в качестве его основного показателя наиболее распространенным является вероятность своевременного выполнения запроса пользователя, определяемая функционалом

$$P(t_{\text{вып}} \leq T^{\text{доп}}) = F(\Lambda^3, C, V, W_0), \quad (1)$$

где $t_{\text{вып}}$ – время выполнения запроса;

$T^{\text{доп}}$ – допустимое время выполнения запроса;

Λ^3 – множество характеристик запросов пользователей (интенсивность и приоритет, требуемые для выполнения ИР);

C – план (вариант) размещения ИР по ЭВМ сети;

V – множество характеристик технического и программного обеспечения (производительность ЭВМ, пропускная способность моноканала локальной вычислительной сети (ЛВС) и др.);

W_0 – подмножество характеристик ИР, влияющих на оперативность доступа (технология хранения и доступа, тип, объем и др.).

Основным показателем безопасности доступа к ИР является вероятность несанкционированного доступа (НСД), определяемая выражением

$$P_{\text{нсд}} = F(M_d, C, V, W_6), \quad (2)$$

где M_d – принятая модель разграничения доступа;

W_6 – подмножество характеристик информационных ресурсов, влияющих на безопасность доступа (технология хранения, важность, конфиденциальность, тип, объем и др.) [6, 7].

Анализ выражений (1) и (2) показывает зависимость каждого из показателей от общих исходных данных, что обуславливает необходимость постановки и решения общей задачи оптимизации размещения и защиты ИР с векторным критерием оптимизации (по критерию максимума оперативности и безопасности доступа).

В общем случае такая задача имеет следующий вид.

Заданы:

1. Множество серверов $R = \{r_1, r_2, \dots, r_v\}$, где v – общее число серверов ЛВС.
2. Множество пользователей $W = \{w_1^k, w_2^k, \dots, w_m^k\}$, где m – общее число пользователей в ЛВС; k – значение метки безопасности из множества меток безопасности $M_6 = \{M_1, \dots, M_k\}$.
3. Множество ИО, подлежащих размещению $F = \{f_1^k, f_2^k, \dots, f_n^k\}$, где n – общее число ИО; k – значение метки безопасности из множества меток безопасности $M_6 = \{M_1, \dots, M_k\}$.
4. Множество логических дисков серверов ЛВС, доступных для размещения информационных объектов (ИО) $D = \{d_1, d_2, \dots, d_h\}$, где h – общее число логических дисков серверов ЛВС.
5. Множество каталогов файловой системы дисков серверов ЛВС, доступных для размещения ИО $E = \{e_1^k, e_2^k, \dots, e_s^k\}$, где s – общее число каталогов; k – значение метки безопасности из множества меток безопасности $M_6 = \{M_1, \dots, M_k\}$.
6. Вектор значений объема ИО $V_o = |v_1^o \quad v_2^o \quad \dots \quad v_n^o|$, где v_j^o – объем j -го ИО.
7. Матрица разграничения доступа пользователей ЛВС к ИО

$$M_{\text{дп}} = \begin{pmatrix} m_{11}^{\text{дп}} & m_{12}^{\text{дп}} & \dots & m_{1m}^{\text{дп}} \\ m_{21}^{\text{дп}} & m_{22}^{\text{дп}} & \dots & m_{2m}^{\text{дп}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1}^{\text{дп}} & m_{n2}^{\text{дп}} & \dots & m_{nm}^{\text{дп}} \end{pmatrix},$$

где $m_{ij}^{\text{дп}} = \begin{cases} 1, & \text{если к } i\text{-му ИО разрешен доступ } j\text{-го пользователя;} \\ 0 & \text{– в противном случае.} \end{cases}$

8. Матрица размещения логических дисков по серверам сети

$$M_{\text{рд}} = \begin{pmatrix} m_{11}^{\text{рд}} & m_{12}^{\text{рд}} & \dots & m_{1v}^{\text{рд}} \\ m_{21}^{\text{рд}} & m_{22}^{\text{рд}} & \dots & m_{2v}^{\text{рд}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{h1}^{\text{рд}} & m_{h2}^{\text{рд}} & \dots & m_{hv}^{\text{рд}} \end{pmatrix},$$

где $m_{ij}^{\text{рд}} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й диск размещен на } j\text{-м сервере;} \\ 0 & \text{– в противном случае.} \end{cases}$

9. Вектор параметров логических дисков серверов ЛВС $V_{\text{л}} = |v_1^{\text{л}} \quad v_2^{\text{л}} \quad \dots \quad v_h^{\text{л}}|$, где $v_i^{\text{л}}$ – объем (размер) i -го логического диска.

10. Матрица размещения каталогов, доступных для размещения ИО по дискам серверов сети

$$M_{\text{рк}} = \begin{pmatrix} m_{11}^{\text{рк}} & m_{12}^{\text{рк}} & \dots & m_{1h}^{\text{рк}} \\ m_{21}^{\text{рк}} & m_{22}^{\text{рк}} & \dots & m_{2h}^{\text{рк}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{s1}^{\text{рк}} & m_{s2}^{\text{рк}} & \dots & m_{sh}^{\text{рк}} \end{pmatrix},$$

где $m_{ij}^{\text{рк}} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й каталог размещен на } j\text{-м диске;} \\ 0 & \text{– в противном случае.} \end{cases}$

11. Вероятность преодоления подсистемы разграничения доступа $P_{\text{пр}}$ в результате однократной попытки подбора нарушителем параметров аутентификации.

Найти: вариант размещения (распределения) элементов множества F по элементам множеств

E и D , описываемый трехмерной матрицей $\mathbf{M}_{\text{разм}}^* = \|\| m_{ijk}^p \|\|$,

где $m_{ijk}^p = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й ИО размещен в } k\text{-м каталоге } j\text{-го диска;} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$

$\{\mathbf{M}_{\text{разм}}\}$ – множество допустимых вариантов размещения ИО, который соответствует минимальному значению целевой функции

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{разм}}^* &= \arg \min_{\mathbf{M}_{\text{разм}} \in \{\mathbf{M}_{\text{разм}}\}} \mathbf{f}'' [P_{\text{нсд}}, (1 - \bar{K}^{\text{л}})] = \\ &= \arg \min_{\mathbf{M}_{\text{разм}} \in \{\mathbf{M}_{\text{разм}}\}} [\mathbf{g}(\mathbf{M}_{\text{разм}}, \mathbf{V}_0, \mathbf{M}_{\text{лп}}, \mathbf{M}_{\text{рд}}, \mathbf{M}_{\text{рк}}, P_{\text{пр}})] \end{aligned} \quad (3)$$

Ограничения:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^S m_{ik}^p \cdot v_i^0 \leq v_i^{\text{л}}, \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^S m_{ihk}^p \cdot v_i^0 \leq v_h^{\text{л}} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^H \sum_{k=1}^S m_{ijk}^p = 1, \\ \dots \\ \sum_{j=1}^H \sum_{k=1}^S m_{njk}^p = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{для } \forall f_{ij}^{k_f} \in e_j^{k_e}, \text{ выполняется условие } k_f = k_e, \quad (6)$$

где $i \in \{1, \dots, n\} \mid n$ – общее число ИО;

$j \in \{1, \dots, s\} \mid s$ – общее число каталогов e ;

$f \in \{1, \dots, k\} \mid k$ – значение метки безопасности из множества меток безопасности $M_6 = \{M_1, \dots, M_k\}$.

Физический смысл ограничения (4) состоит в том, что суммарный объем информационных объектов, размещенных на каждом диске множества D , не может превышать его объем, значение которого определяется соответствующим элементом вектора параметров логических дисков $\mathbf{V}_\text{л}$.

Ограничение (5) сводится к требованию размещения только одного экземпляра каждого информационного объекта, то есть элемента множества F .

Ограничение (6) устанавливает, что в каталоге не должно быть ИО, к которым допущены пользователи, имеющие более высокие, чем у него метки безопасности.

Выбор метода решения адекватного по отношению к данной постановке задачи определяет необходимость анализа особенностей ее области допустимых решений (ОДР), вида и характера целевой функции и системы ограничений, зависимости между ОДР и неуправляемыми параметрами.

Алгоритм выбора математических методов решения данной задачи представлен на рисунке 1.

В задаче (3)-(6) ОДР образуется путем объединения вариантов размещения ИР по серверам, логическим дискам и каталогам, задаваемым матрицами размещения вида

$$\mathbf{M}_{\text{разм}}^* = \|\| m_{ij} \|\| = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1m} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2j} & \dots & m_{2m} \\ \vdots & & & & & \\ m_{i1} & m_{i2} & \dots & m_{ij} & \dots & m_{im} \\ \vdots & & & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nj} & \dots & m_{nm} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$; $m_{ij} \in \{0, 1\}$, то есть элементы матрицы размещения $\mathbf{M}_{\text{разм}}^*$ могут принимать зна-

чения «1» или «0», что означает соответственно i -й ИО размещен на j -м сервере (диске или каталоге) или отсутствует на нем; для $\forall j = \overline{1, m}$ справедливо

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij} = n; \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^n m_{ij} = 1. \tag{9}$$

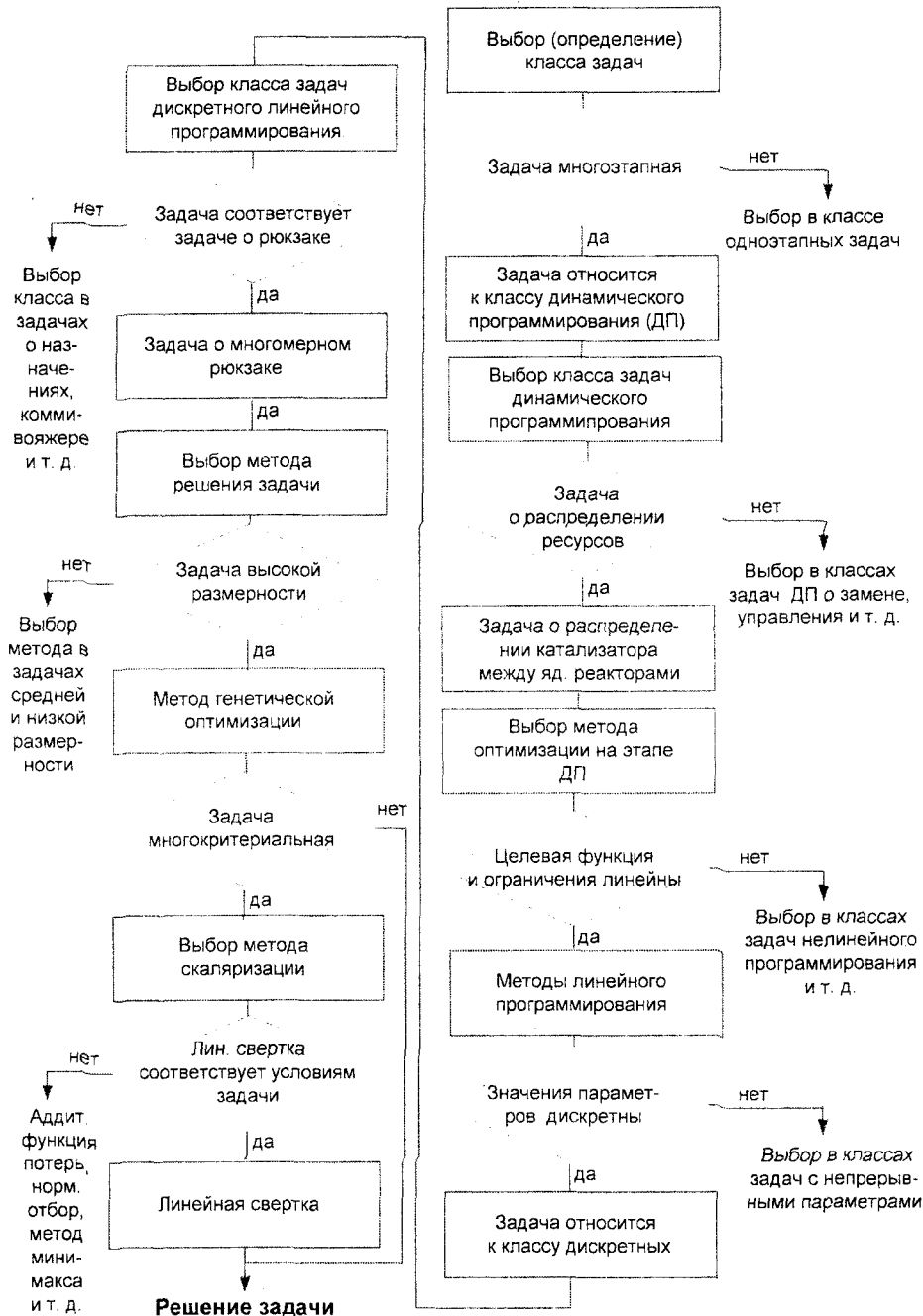


Рис. 1. Алгоритм выбора математических методов решения задачи оптимизации размещения и защиты ИП

Условие (8) устанавливает, что каждое допустимое решение должно обеспечивать размещение всех ИО, а условие (9) – что ИО может быть размещен только в одном месте (на одном сервере, диске, в каталоге).

Анализ вида и характера целевой функции (3), показывает, что данная задача относится к

классу задач с векторным критерием оптимизации, с линейной целевой функцией, а с учетом вида ОДР – к задачам целочисленного программирования.

Вид и характер ограничений (4)-(6) носит линейный характер, и в соответствии с этим задача попадает в класс линейного программирования.

В связи с тем, что данная задача оптимизации предполагает размещение ИО в пределах ЛВС по серверам, в пределах каждого сервера – по логическим дискам и в пределах каждого диска – по каталогам, размерность ОДР при ее решении в один этап становится чрезмерно высокой. В этом случае для формального представления варианта размещения необходимо использовать трехмерную матрицу, элементы которой m_{ijk} могут принимать значение «1» – если i -й ИО принадлежит k -му каталогу j -го сервера и значение, равное «0», – в противном случае. Для учета соответствия каталогов логическим дискам и логических дисков серверам при расчете значений целевой функции необходимо использование двух дополнительных двумерных матриц (рисунок 2), которые накладывают ограничения на возможность присвоения единичных значений элементам m_{ijk} , в случае если соответствующего адреса хранения ИО физически не существует. Максимально возможное число вариантов размещения I ИО по K каталогам на J серверах, задаваемых матрицей $I \times J \times K$ составляет I^K , что при относительно небольших значениях исходных данных приводит к NP -полноте задачи оптимизации [8]. В связи с этим целесообразным представляется декомпозиция исходной задачи в каждой из рассмотренных постановок на отдельные последовательные этапы (рисунок 2) и решение задач оптимизации на основе метода динамического программирования.

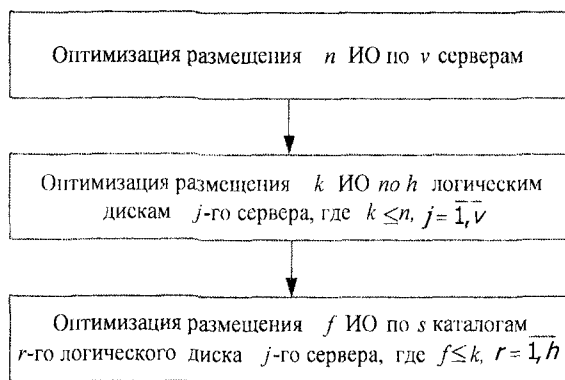


Рис. 2. Декомпозиция решения общей задачи оптимизации

В основе метода динамического программирования лежит принцип Беллмана, согласно которому оптимальная стратегия обладает таким свойством, что каково бы ни было начальное состояние и начальные решения, последующие решения должны приниматься исходя из оптимальной стратегии с учетом состояния, вытекающего из первого решения. Использование этого принципа является гарантией того, что оптимальное решение, принимаемое на каждом этапе, является наилучшим с точки зрения всего процесса в целом.

Формально процесс оптимизации при динамическом программировании описывается следующим соотношением (итерационной процедурой).

На первом этапе (оптимизация размещения n ИО по v серверам)

$$f_v^1(M_{\text{разм}}) = \max_{\substack{0 \leq y_v \leq n \\ -1 \leq K_v \leq 1 \\ 0 \leq P_{\text{нсд}_v} \leq P_{\text{нсд}}^{\text{зад}}}} [g_v(K_v^n, P_{\text{нсд}_v}, y_v) + f_{v-1}(n - y_v)], \quad (10)$$

$$f_1^1(M_{\text{разм}}) = \max_{\substack{0 \leq y_1 \leq n \\ -1 \leq K_1^n \leq 1 \\ 0 \leq P_{\text{нсд}_1} \leq P_{\text{нсд}}^{\text{зад}}}} [g_1(K_1^n, P_{\text{нсд}_1}, y_1)] = g_1(K_1^n, P_{\text{нсд}_1}, n), \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^v y_i = n. \quad (12)$$

На втором этапе (оптимизация размещения k ИО по h логическим дискам j -го сервера)

$$f_h^2(M_{\text{разм}}) = \max_{\substack{0 \leq y_h \leq k \\ 0 \leq P_{\text{нсд}_h} \leq P_{\text{нсд}}^{\text{зад}}}} [g_h(P_{\text{нсд}_h}, y_h) + f_{h-1}(k - y_h)], \quad (13)$$

$$f_1^2(M_{\text{разм}}) = \max_{\substack{0 \leq y_1 \leq k \\ 0 \leq P_{\text{нсд}_1} \leq P_{\text{нсд}}^{\text{зад}}}} [g_1(P_{\text{нсд}_1}, y_1)] = g_1(P_{\text{нсд}_1}, k), \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^h y_i = k. \quad (15)$$

На третьем этапе (оптимизация размещения f ИО по s каталогам r -го логического диска j -го сервера)

$$f_s^3(M_{\text{разм}}) = \max_{\substack{0 \leq y_s \leq f \\ 0 \leq P_{\text{нсд}_s} \leq P_{\text{нсд}}^{\text{зад}}}} [g_s(P_{\text{нсд}_s}, y_s) + f_{s-1}(f - y_s)], \quad (16)$$

$$f_1^3(M_{\text{разм}}) = \max_{\substack{0 \leq y_1 \leq f \\ 0 \leq P_{\text{нсд}_1} \leq P_{\text{нсд}}^{\text{зад}}}} [g_1(P_{\text{нсд}_1}, y_1)] = g_1(P_{\text{нсд}_1}, f), \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^s y_i = f. \quad (18)$$

где $f_v^1(M_{\text{разм}})$, $f_h^2(M_{\text{разм}})$, $f_s^3(M_{\text{разм}})$ – максимальный выигрыш, получаемый при распределении ИО между серверами, по логическим дискам и по каталогам соответственно;

$g_i(K_i^n, P_{\text{нсд}_i}, y_i)$ – выигрыш, получаемый при распределении совокупности y_i ИО на i -том сервере (локальном диске, в каталоге);

K_i^n – коэффициент локализации запросов пользователей i -го сервера, определяемый отношением разности объемов локальных и удаленных запросов к ИР к их общему объему в домене;

$P_{\text{нсд}_i}$ – вероятность НСД к ИО на i -том сервере (локальном диске, в каталоге).

Первый член правой части уравнений (10), (13) и (16) выражает выигрыш, получаемый при распределении ИО на v -том сервере, h -том логическом диске и в s -том каталоге, при выборе соответственно $y = y_v$, $y = y_h$, $y = y_s$, где y_v , y_h и y_s являются значениями величины y в соответствующих интервалах $(0, n)$, $(0, k)$ и $(0, f)$, максимизирующими данные уравнения. Второй член представляет выигрыш для остальных $v-1$ серверов, $h-1$ логических дисков и $s-1$ каталогов, на которые приходится соответственно $n - y_v$, $k - y_h$ и $f - y_s$ количество ИО, которые, в свою очередь, должны быть распределены между указанными серверами, логическими дисками и каталогами оптимальным образом. Выигрыши для одностадийного сервера, логического диска и каталога описывается соответственно уравнениями (11), (14) и (17). Условия (12), (15) и (18) требуют полного распределения соответствующего количества ИО на серверах, логических дисках и в каталогах.

Из множества известных задач динамического программирования представленная задача в наибольшей степени соответствует классу задач о распределении ресурсов, и в частности, задаче о распределении между некоторым количеством параллельно соединенных реакторов полного количества ядерного катализатора, активность которого не зависит от времени, но различна для каждого реактора. Данная задача решается методом прямого прогона. При этом на каждом этапе динамической оптимизации решается задача линейного программирования, исходные данные и ограничения в которой зависят от решений полученных на предыдущих этапах. Содержание и порядок решения такой задачи рассматривались в [8].

Анализ постановки представленной выше задачи позволяет выделить ее принципиальные особенности и возможность применения классических методов линейной оптимизации (рисунок 3):

– зависимость параметров целевой функции и ограничений от рассматриваемого варианта размещения ИО (так коэффициент локализации запросов пользователей к ИО (K^n) зависит от его размещения на конкретном сервере, а вероятность НСД к ИО ($P_{\text{нсд}}$) – от размещения других ИО по

серверам, дискам и каталогам);

– высокую размерность области всех возможных вариантов размещения (так для ЛВС, состоящей всего из трех доменов, на серверах которых размещено только 600 ИО, число возможных вариантов размещения ИО по серверам составит $1,87 \cdot 10^{286}$);

– необходимость скаляризации векторного критерия при решении задачи (3)-(6).

С учетом данных особенностей на каждом этапе динамического программирования представленная задача должна рассматриваться как задача дискретного линейного программирования, которая формально соответствует многомерной постановке задачи о рюкзаке. Для решения последней в ее классическом виде используются алгоритмы Данцинга или Ленд и Дойг. К достоинствам этих методов относится их относительная простота программной реализации. Однако основным их недостатком является невозможность применения на задачах высокой размерности, для которых исследование ОДР данными методами даже с использованием вычислительных возможностей современных ЭВМ требует слишком больших, недопустимых в практической работе, временных затрат [9].

В связи с этим для решения задачи (3)-(6) представляется целесообразным использование методов эволюционных вычислений, объединяемых понятием генетические алгоритмы оптимизации (ГАО) [10]; а для скаляризации векторного критерия оптимизации целесообразно использовать метод линейной свертки.



Рис. 3. Методы решения задач линейного программирования

Список литературы

1. Назаров С.В., Ашихмин Н.В., Луговец А.В. и др. Локальные вычислительные сети: Справочник. В 3-х кн. Кн. 3: Организация функционирования, эффективность, оптимизация / Под ред. С.В. Назарова – М.: Финансы и статистика, 1995. – 248 с.
2. Бэри Нанс. Компьютерные сети: Пер. с англ. – М.: БИНОМ, 1995. – 400 с.
3. Microsoft Corporation. Компьютерные сети. Учебный курс / Пер. с англ. – М.: Издательский отдел «Русская Редакция» ТОО «Channel Trading Ltd», 1997. – 696 с.
4. Щеглов А.Б. Защита компьютерной информации от несанкционированного доступа. – СПб.: Наука и Техника, 2004. – 384 с.
5. Зегжда Д.П., Ивашко А.М. Основы безопасности информационных систем. – М.: Горячая линия – Телеком, 2000. – 452 с.
6. Бияшев Р.Г., Афонская Т.Л. Некоторые задачи защиты информации // Зарубежная радиоэлектроника.

– 1994. – № 2/3. – С. 42-45.

7. Кульба В.В., Ковалевский С.С., Косяченко С.А., Сиротюк В.О. Теоретические основы проектирования оптимальных структур распределенных баз данных. Серия «Информатизация России на пороге XXI века». – М.: СИНТЕГ, 1999. – 600 с.

8. Робертс С. Динамическое программирование в процессах химической технологии и методы управления. – М.: Мир, 1965. – 480 с.

9. Сигал И.Х. Задача о рюкзаке: Теория и вычислительные алгоритмы. Учебное пособие. – М.: МИИТ, 1999. – 74 с.

10. Букатова И.Л. Обучающиеся, адаптивные и самоорганизующиеся эволюционные вычисления // Обозрение прикладной и промышленной математики. – Том 3. – Вып. 5. – М.: «ТВН», 1996. – С. 706-724.

УДК 519.6

*Радыгин В.М., докт. техн. наук, профессор, начальник кафедры математики
Бочков П.В., старший научный сотрудник научно-исследовательского отдела
(Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации)
г. Орел, тел. (4862) 419914*

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ РАЗМЕЩЕНИЯ И ОРГАНИЗАЦИИ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ ПРИ ДОМИНИРОВАНИИ ТРЕБОВАНИЙ ОПЕРАТИВНОСТИ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДОСТУПА ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ ЛОКАЛЬНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЕТИ

В статье рассматривается формализация задачи оптимизации размещения и организации защиты информационных ресурсов локальной вычислительной сети на основе реализованных в сетевой операционной системе механизмов разграничения доступа к ним. Представленная модель оптимизации размещения и организации защиты информационных ресурсов ориентирована на информационную систему, в которой доминирует требование оперативности обеспечения доступа к ним ее пользователей.

Одной из задач обеспечения защиты информационных ресурсов (ИР) локальной вычислительной сети (ЛВС) является разработка и реализация системы разграничения доступа к ним. С этой целью на основе выбранной модели разграничения строится матрица доступа, которая отражает права и полномочия пользователей по отношению к ИР ЛВС. Очевидно, что для получения доступа, установленного администратором, пользователь должен пройти процедуру идентификации и ввести правильный пароль входа в сеть или ее отдельный домен. Дополнительными средствами разграничения доступа выступают пароли на доступ к дискам и каталогам файловой системы ЭВМ.

Современные операционные системы обеспечивают возможность разграничения доступа [1]:

- на уровне сети (доступ к ресурсам ЭВМ);
- на уровне дисковой подсистемы (доступ к логическим и физическим дискам ЭВМ);
- на уровне файловой системы диска (доступ к каталогам диска).

С позиций задачи разграничения доступа к ИР наиболее приемлемым является вариант, при котором информационные потребности пользователей не пересекаются, а для доступа к конкретному информационному объекту (ИО) пользователь должен пройти все уровни защиты, используя при этом различные пароли. Очевидно, что при таком варианте в каталоге каждого пользователя и на дисках, где хранятся ИР, не должно быть данных других пользователей. На практике пользователи ЛВС связаны по своим функциональным обязанностям и могут выполнять части единой задачи. Это приводит к пересечению информационных потребностей и необходимости доступа нескольких пользователей к одним и тем же данным. С другой стороны, структуризация данных выполняется при проектировании баз данных, Intranet-сети, системы документооборота, исходя из требований нормализации, минимизации дублирования, оперативности доступа [2]. При этом данные различных пользователей могут стать частями единого более крупного информационного объекта (таблицы БД, от-

чета БД, электронного документа и т.п.). Это определяет второе направление повышения уровня защиты за счет оптимизации размещения данных – группирование данных однородных с точки зрения информационных потребностей пользователей в информационные объекты (ИО) для последующего разграничения доступа.

Выбор варианта размещения ИР как функции вероятности несанкционированного доступа (НСД) показан на примере постановки задачи, которая на основании вышеизложенного на содержательном уровне может быть сформулирована следующим образом.

Заданы:

- упорядоченное относительно присвоенных меток безопасности множество пользователей ЛВС, в котором, чем выше полномочия субъекта, тем меньше значение его метки безопасности;
- упорядоченное относительно присвоенных меток безопасности множество ИО (таблиц БД, текстовых файлов и т. д.);
- информационные потребности пользователей (распределение элементов множества ИО по элементам множества пользователей);
- множество серверов и соответствующих им доменов ЛВС;
- множество логических дисков и каталогов, выделенных для размещения информационных ресурсов;
- размер дисковой памяти каждого сервера сети;
- вероятностная оценка стойкости подсистемы разграничения доступа [3].

Найти:

- вариант распределения элементов множества ИО по элементам множества каталогов и логических дисков серверов сети, при котором среднее время доступа пользователей к ИР будет минимальным.

Ограничения:

- суммарный объем данных, размещенных на диске, не должен превышать его физических ограничений;
- каждому ИО должны соответствовать единственный логический диск и каталог ЛВС;
- полученное решение (вариант размещения) должно удовлетворять требованиям мандатной и дискреционной моделей разграничения доступа;
- вероятность НСД к ИР не должна превышать заданного требованиями значения.

Введение принятых в теории и практике моделирования ЛВС и систем защиты обозначений [4–6] позволяет формализовать рассмотренную постановку задачи в следующем виде.

Заданы:

1. Множество серверов $R = \{r_1, r_2, \dots, r_J\}$, где J – общее число серверов ЛВС.
2. Множество пользователей $W = \{w_1^m, w_2^m, \dots, w_K^m\}$, где K – общее число пользователей в ЛВС; m – значение метки безопасности из множества меток безопасности $M_6 = \{M_1, \dots, M_m\}$.
3. Множество ИО, подлежащих размещению $F = \{f_1^m, f_2^m, \dots, f_I^m\}$, где I – общее число ИО; m – значение метки безопасности из множества меток безопасности $M_6 = \{M_1, \dots, M_m\}$.
4. Множество логических дисков серверов ЛВС, доступных для размещения ИО $D = \{d_1, d_2, \dots, d_S\}$, где S – общее число логических дисков серверов ЛВС.
5. Множество каталогов файловой системы дисков серверов ЛВС, доступных для размещения ИО $E = \{e_1^m, e_2^m, \dots, e_L^m\}$, где L – общее число каталогов; m – значение метки безопасности из множества меток безопасности $M_6 = \{M_1, \dots, M_m\}$.
6. Вектор значений объема ИО $V_0 = \left| \begin{matrix} v_1^0 & v_2^0 & \dots & v_I^0 \end{matrix} \right|$, где v_i^0 – объем i -го ИО.

7. Матрица разграничения доступа пользователей ЛВС к ИО $M_{\text{дио}} = \left\| m_{ij}^{\text{дио}} \right\|$, где $m_{ij}^{\text{дио}} = \begin{cases} 1, & \text{если к } i\text{-му ИО разрешен доступ } j\text{-го пользователя;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

8. Матрица размещения логических дисков по серверам сети $\mathbf{X}_{д-с} = \|x_{ij}^{д-с}\|$, где $x_{ij}^{д-с} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й диск размещен на } j\text{-м сервере;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

9. Вектор параметров логических дисков серверов ЛВС $\mathbf{V}_д = \|v_1^д \quad v_2^д \quad \dots \quad v_s^д\|$, где $v_s^д$ – объем (размер) s -го логического диска.

10. Матрица размещения каталогов, доступных для размещения ИО по дискам серверов сети $\mathbf{X}_{к-д} = \|x_{ij}^{к-д}\|$, где $x_{ij}^{к-д} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й каталог размещен на } j\text{-м диске;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

11. Вероятность преодоления подсистемы разграничения доступа $P_{пр}$ в результате однократной попытки подбора нарушителем параметров аутентификации.

Найти:

вариант размещения ИО по серверам, дискам и каталогам ЛВС (распределения элементов множества F по элементам множеств E и D), описываемый трехмерной матрицей $\mathbf{M}_{разм}^* = \|m_{ijk}^p\|$, который соответствует минимальному значению среднего времени доступа пользователей к ИР ($\bar{T}_{вз}$), то есть

$$\mathbf{M}_{разм}^* = \arg \min_{\mathbf{M}_{разм} \in \{\mathbf{M}_{разм}\}} [f'(\mathbf{M}_{разм}, \mathbf{V}_о, \mathbf{M}_{дио}, \mathbf{X}_{д-с}, \mathbf{X}_{к-д}, P_{пр})]. \quad (1)$$

Ограничения:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L m_{ill}^p \cdot v_i^o \leq v_1^д, \\ \dots \\ \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L m_{isl}^p \cdot v_i^o \leq v_s^д \end{cases}; \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^S \sum_{l=1}^L m_{lsl}^p = 1, \\ \dots \\ \sum_{s=1}^S \sum_{l=1}^L m_{lsl}^p = 1 \end{cases}; \quad (3)$$

$$\text{для } \forall f_{il}^{m_f} \in e_l^{m_e}, \text{ выполняется условие } m_f = m_e, \quad (4)$$

где $i \in \{1, \dots, I\} \mid I$ – общее число ИО; $l \in \{1, \dots, L\} \mid L$ – общее число каталогов e ; $f \in \{1, \dots, m\} \mid m$ – значение метки безопасности из множества меток безопасности $M_б = \{M_1, \dots, M_m\}$.

$$P_{нсд} \leq P_{нсд}^{зад}. \quad (5)$$

Физический смысл ограничения (2) состоит в том, что суммарный объем информационных объектов, размещенных на каждом диске множества D , не может превышать его объем, значение которого определяется соответствующим элементом вектора параметров логических дисков $\mathbf{V}_д$.

Ограничение (3) сводится к требованию размещения только одного экземпляра каждого информационного объекта, то есть элемента множества F .

Ограничение (4) устанавливает, что в каталоге не должно быть ИО, к которым допущены пользователи, имеющие более высокие, чем у него, метки безопасности.

Ограничение (5) устанавливает, что в рассматриваемом варианте размещения вероятность несанкционированного доступа пользователей не должна превышать значения, заданного требования к системе защиты информации.

В соответствии с формулировкой задачи (1)-(5), ее решение целесообразно осуществлять в три этапа: на первом производится оптимизация размещение ИР по серверам ЛВС, на втором – по

логическим дискам серверов и на третьем – по каталогам логических дисков.

В представленной задаче, целевым показателем является среднее время выполнения запросов к ИР ($\bar{T}_{вз}$). При этом под затратами на выполнение запроса пользователя к отдельно взятому i -му ИО понимается время, затрачиваемое на передачу запроса от рабочей станции пользователя на сервер домена (ассоциируем его как локальный сервер), ответа на него и информационный обмен с серверами других доменов ЛВС (далее ассоциируем их как удаленные сервера относительно рабочих станций рассматриваемого домена в случае нахождения ИО за его пределами). Среднее время выполнения запросов к ИО, размещенным на j -ом сервере можно выразить соотношением

$$\bar{T}_{вз_j} = \frac{1}{I_j} \sum_{i=1}^{I_j} \frac{V_{обр_i}^л v_{ком_i}^л + V_{ио_i} v_{обр_i}^л}{v_{обр_i}^л v_{ком_i}^л} + \frac{1}{I_j} \sum_{i=1}^{I_j} \left(\frac{V_{обр_i}^{уд} v_{ком_i}^{уд} + V_{ио_i} v_{обр_i}^{уд}}{v_{обр_i}^{уд} v_{ком_i}^{уд}} \cdot \frac{n_i^{уд}}{R_i} \right), \quad (6)$$

где $V_{ио_i}$ – размер ИО; $V_{обр_i}^л$ и $V_{ком_i}^л$ – соответственно объем обрабатываемых на локальном сервере и передаваемых данных между рабочей станцией и сервером домена при обращении пользователя к ИО; $v_{обр_i}^л$ и $v_{ком_i}^л$ – скорости, с которыми указанные выше объемы данных обрабатываются и передаются в сети домена; $V_{обр_i}^{уд}$ и $V_{ком_i}^{уд}$ – соответственно объем данных, обрабатываемых на удаленном сервере и передаваемых по центральной сети обмена данными, при выполнении удаленных запросов; $v_{обр_i}^{уд}$ и $v_{ком_i}^{уд}$ – скорости, с которыми указанные выше объемы данных обрабатываются на удаленном сервере и передаются; R_i – общее число запросов к отдельно взятому i -му ИО за контрольный промежуток времени; $n_i^л$ и $n_i^{уд}$ – соответственно число локальных и удаленных запросов к i -му ИО на этом же временном отрезке; I_j – общее число ИО, размещенных на j -ом сервере.

Из (6) следует, что среднее время выполнения запросов к ИР ЛВС в значительной степени зависит от производительности удаленных относительно рабочей станции серверов (то есть серверов внешних доменов) и величины объемов данных, передаваемых по центральной сети обмена данными при реализации удаленных запросов (то есть к ИО, находящимся за пределами домена рабочей станции), а также скоростей передачи данных в ней. В связи с тем, что вопросы совершенствования характеристик серверов и элементов телекоммуникационной составляющей ЛВС образуют самостоятельную группу исследований и в данной задаче не рассматриваются, основной путь значительного снижения среднего времени выполнения запросов к ИР ЛВС состоит в сокращении объемов данных, передаваемых по центральной сети обмена данными, то есть в уменьшении в сети общего объема удаленных запросов. Исходя из этого, в качестве основного критерия оптимальности размещения ИО в ЛВС целесообразно принять коэффициент локализации запросов пользователей или субъектов доступа (СД) $K^л$, характеризующий затраты на информационный обмен через центральную сеть обмена данными.

Значение коэффициента локализации определяется в процессе мониторинга сети на основе статистики числа обращений каждого пользователя к каждому ИО и размеров самих ИО в соответствии с выражением:

$$K^л = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \frac{V_{ijk}^{л3} - V_{ijk}^{у3}}{V_{ijk}^{л3} + V_{ijk}^{у3}} = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I K_{ij}^л, \quad (7)$$

где $V_{ijk}^{л3}$ – объем локальных запросов K пользователей сети к i -му ИО j -го сервера; $V_{ijk}^{у3}$ – объем удаленных запросов K пользователей сети к i -му ИО j -го сервера; $K_{ij}^л$ – коэффициент локализации i -го ИО, размещенного на j -м сервере.

Таким образом, представленная выше задача может рассматриваться как задача оптимизации размещения ИР в ЛВС по критерию минимума затрат на информационный обмен между ее серверами, и тогда ее целевая функция для первого этапа решения задачи (размещения ИО по серверам

ЛВС) может быть представлена в следующем виде

$$\mathbf{M}_{\text{разм}}^{c*} = \arg \max_{\mathbf{M}_{\text{разм}} \in \{\mathbf{M}_{\text{разм}}\}} \left(\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I m_{ij}^p m_{ij}^a \right), \quad (8)$$

где m_{ij}^p – матрица размещения I ИО по J серверам; m_{ij}^a – матрица коэффициентов локализации обращений пользователей к ИО.

Конкретизируем ограничение (5).

Для формализации зависимости вероятности НСД от варианта размещения ИР по серверам, логическим дискам серверов и каталогам используем $\mathbf{M}_{\text{дио}}$ и введем дополнительно следующие характеристики системы разграничения доступа:

– матрицу разграничения доступа пользователей к доменам (серверам) ЛВС $\mathbf{M}_{\text{дс}} = \left\| m_{ij}^{\text{дс}} \right\|$, где $i = \overline{1, K}$; $j = \overline{1, J}$; $m_{ij}^{\text{дс}} \in \{0, 1\}$, то есть элементы матрицы $\mathbf{M}_{\text{дс}}$ могут принимать значения "1" или "0", что означает соответственно i -й пользователь ЛВС имеет право доступа к j -му серверу или доступ к нему запрещен;

– матрицу разграничения доступа пользователей к логическим дискам ЛВС $\mathbf{M}_{\text{дд}} = \left\| m_{ij}^{\text{дд}} \right\|$, где $i = \overline{1, K}$; $j = \overline{1, S}$; $m_{ij}^{\text{дд}} \in \{0, 1\}$;

– матрицу разграничения доступа пользователей к каталогам ЛВС $\mathbf{M}_{\text{дк}} = \left\| m_{ij}^{\text{дк}} \right\|$, где $i = \overline{1, K}$; $j = \overline{1, L}$; $m_{ij}^{\text{дк}} \in \{0, 1\}$.

Для отображения принадлежности, то есть физического соответствия дисков серверам, а каталогов – дискам, используем $\mathbf{X}_{\text{д-с}}$ и $\mathbf{X}_{\text{к-д}}$.

Возможные решения задачи на соответствующих этапах оптимизации размещения ИР в ЛВС формально соответствуют матрицам размещения ИО по ее серверам, их логическим дискам и каталогам:

$\mathbf{M}_{\text{разм}}^c = \left\| m_{ij}^c \right\|$, где $i = \overline{1, I}$; $j = \overline{1, J}$; $m_{ij}^c \in \{0, 1\}$, то есть элементы матрицы размещения $\mathbf{M}_{\text{разм}}^c$ могут принимать значения "1" или "0", что означает соответственно i -й ИО размещен на j -м сервере или отсутствует на нем. При этом для $\forall j = \overline{1, J}$ справедливо

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I m_{ij}^c = I; \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^J m_{ij}^c = 1; \quad (10)$$

$\mathbf{M}_{\text{разм}}^d = \left\| m_{ij}^d \right\|$, где $i = \overline{1, I}$; $j = \overline{1, S}$; $m_{ij}^d \in \{0, 1\}$, то есть элементы матрицы размещения $\mathbf{M}_{\text{разм}}^d$ могут принимать значения "1" или "0", что означает соответственно i -й ИО размещен на j -м диске или отсутствует на нем. При этом для $\forall j = \overline{1, S}$ справедливо

$$\sum_{j=1}^S \sum_{i=1}^I m_{ij}^d = I; \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^S m_{ij}^d = 1; \quad (12)$$

$\mathbf{M}_{\text{разм}}^k = \left\| m_{ij}^k \right\|$, где $i = \overline{1, I}$; $j = \overline{1, L}$; $m_{ij}^k \in \{0, 1\}$, то есть элементы матрицы размещения $\mathbf{M}_{\text{разм}}^k$ могут принимать значения "1" или "0", что означает соответственно i -й ИО размещен в j -м каталоге или отсутствует в нем. При этом для $\forall j = \overline{1, L}$ справедливо

$$\sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^I m_{ij}^k = I; \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^L m_{ij}^r = 1. \tag{14}$$

В общем случае согласно [7] вероятность НСД к отдельному i -му ИО относительно всех групп потенциальных нарушителей из числа законных пользователей сети будет иметь вид

$$P_{НСД_i} = 1 - (1 - P_{НСД_0})^{k_{o_i} + (k_{к_i} + (k_{с_i} P_{НСД_с} + k_{д_i}) P_{НСД_д}) P_{НСД_к}}, \tag{15}$$

где $P_{НСД_с}$, $P_{НСД_д}$, $P_{НСД_к}$, $P_{НСД_0}$ – вероятности преодоления рубежей защиты сервера, дисков, каталогов и самих ИО для реализованного в сети механизма разграничения доступа к ним; $k_{с_i}$, $k_{д_i}$, $k_{к_i}$, k_{o_i} – число пользователей, не имеющих доступа к i -му ИО, но допущенных соответственно до уровней входа на сервер, логический диск, в каталог и находящихся непосредственно в самом каталоге, где этот ИО размещен, определяемые следующими выражениями:

Число пользователей $k_{с_i}$, находящихся на рубеже защиты сервера, где размещен i -й ИО, но не имеющих право доступа к этому ИО, определяется выражением

$$k_{с_i} = K - \sum_{i=1}^K m_{ij}^{дио}, \tag{16}$$

где K – общее число всех законных пользователей сети, которое определяется по числу строк матрицы $M_{дио}$.

Число пользователей $k_{д_i}$, допущенных на сервер, то есть до рубежа защиты диска, на котором размещен i -й ИО, но не имеющих право доступа к этому ИО, определяется выражением

$$k_{д_i} = \sum_{i=1}^K m_{ij}^{до} - \sum_{i=1}^K m_{ij}^{дио}, \tag{17}$$

при условии корректного (правильного) назначения прав доступа пользователей в домены и к ИО при котором всем пользователям, допущенным к i -му ИО, будет разрешен доступ в домен, где данный ИО размещен, то есть

$$\sum_{i=1}^K m_{ij}^{дио} \leq \sum_{i=1}^K m_{ij}^{до}. \tag{18}$$

Число пользователей $k_{к_i}$, допущенных на логический диск, то есть до рубежа защиты каталога, в котором размещен i -й ИО, но не имеющих право доступа к этому ИО, определяется выражением

$$k_{к_i} = \sum_{i=1}^K m_{ij}^{дл} - \sum_{i=1}^K m_{ij}^{дио}, \tag{19}$$

при условии корректного (правильного) назначения прав доступа пользователей к дискам и к ИО при котором всем пользователям, допущенным к i -му ИО, будет разрешен доступ к диску, где данный ИО размещен, то есть

$$\sum_{i=1}^K m_{ij}^{дио} \leq \sum_{i=1}^K m_{ij}^{дл}. \tag{20}$$

Число пользователей k_{o_i} , допущенных в каталог, где хранится i -й ИО, то есть непосредственно на рубеж защиты самого ИО, но не имеющих право доступа к нему, определяется выражением

$$k_{o_i} = \sum_{i=1}^K m_{ij}^{дк} - \sum_{i=1}^K m_{ij}^{дио}, \tag{21}$$

при условии корректного (правильного) назначения прав доступа пользователей в каталоги и к ИО при котором всем пользователям, допущенным к i -му ИО, будет разрешен доступ в каталог, где

данный ИО размещен, то есть

$$\sum_{i=1}^K m_{ij}^{\text{ДИО}} \leq \sum_{i=1}^K m_{ij}^{\text{ДК}} \quad (22)$$

Тогда ограничение (5) для оптимизации размещения ИО по серверам ЛВС имеет вид

$$P_{\text{НСД}j} = 1 - \prod_{i=1}^{I_j} (1 - P_{\text{НСД}d_i} P_{\text{НСД}k_i} P_{\text{НСД}o_i})^{k_{d_i} + k_{c_i} P_{\text{НСД}c_i}} \leq P_{\text{НСД}}^{\text{зад}}, \quad (23)$$

где I_j – число ИО, размещенных на j -м сервере; $P_{\text{НСД}}^{\text{зад}}$ – величина допустимой вероятности НСД к ИО, установленная для данной ЛВС; k_{c_i} и k_{d_i} рассчитываются с использованием (16) и (17).

Целевые функции оптимизации размещения ИО по логическим дискам и каталогам будут соответственно иметь следующий вид:

для второго этапа решения данной задачи (размещение ИО по логическим дискам)

$$M_{\text{разм}}^{\text{д}*} = \arg \min_{M_{\text{разм}}^{\text{д}} \in \{M_{\text{разм}}^{\text{д}}\}} \left\{ 1 - \prod_{i=1}^{I_s} (1 - P_{\text{НСД}k_i} P_{\text{НСД}o_i})^{k_{k_i} P_{\text{НСД}k_i}} \right\}; \quad (24)$$

для третьего этапа решения данной задачи (размещение ИО по каталогам)

$$M_{\text{разм}}^{\text{к}*} = \arg \min_{M_{\text{разм}}^{\text{к}} \in \{M_{\text{разм}}^{\text{к}*}\}} \left\{ 1 - \prod_{i=1}^{I_l} (1 - P_{\text{НСД}o_i})^{k_{o_i}} \right\}, \quad (25)$$

где k_{k_i} и k_{o_i} вычисляются по выражениям (19) и (21).

Ограничения для (24) соответствуют выражениям (2) и (3), а для (25) – (3) и (4). Условие (5) для (24) и (25) имеет соответственно следующий вид:

для второго этапа решения данной задачи (размещение ИО по логическим дискам)

$$1 - \prod_{i=1}^{I_s} (1 - P_{\text{НСД}k_i} P_{\text{НСД}o_i})^{k_{k_i} + (k_{c_i} P_{\text{НСД}c_i} + k_{d_i}) P_{\text{НСД}d_i}} \leq P_{\text{НСД}}^{\text{зад}}; \quad (26)$$

для третьего этапа решения данной задачи (размещение ИО по каталогам)

$$1 - \prod_{i=1}^{I_l} (1 - P_{\text{НСД}o_i})^{k_{o_i} + (k_{k_i} + (k_{c_i} P_{\text{НСД}c_i} + k_{d_i}) P_{\text{НСД}d_i}) P_{\text{НСД}k_i}} \leq P_{\text{НСД}}^{\text{зад}}, \quad (27)$$

где $k_{c_i}, k_{d_i}, k_{k_i}, k_{o_i}$ рассчитываются с использованием (16), (17), (19) и (21).

Список литературы

1. Блэк Ю. Сети ЭВМ: протоколы, стандарты, интерфейсы. – М.: Мир, 1990. – 506 с.
2. Бэри Нанс. Компьютерные сети: Пер. с англ. – М.: БИНОМ, 1995. – 400 с.
3. Щеглов А.Б. Защита компьютерной информации от несанкционированного доступа. – СПб.: Наука и техника, 2004. – 384 с.
4. Мамиконов А.Г. и др. Оптимизация структур распределенных баз данных в АСУ. – М.: Наука, 1990. – 240 с.
5. Тиори Т., Фрай Дж. Проектирование структур баз данных. В 2-х кн. Кн. 1. – М.: Мир, 1985. – 218 с.
6. Попов А.А., Телушкин И.М., Бушуев С.Н. и др. Основы общей теории систем. Часть II. – СПб.: ВАС, 1992. – 332 с.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов. Изд. 5-е. – М.: «Высшая школа», 1977. – 479 с.

МЕХАНИКА

УДК 517.95

*Анохин П.Н., аспирант**Гордон В.А., докт. техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Высшая математика»**(Орловский государственный технический университет)**г. Орел, тел. (4862)419848; e-mail: gordon@ostu.ru***ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОДОЛЬНЫХ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ**

The inverse problem of the longitudinal elastic vibrations of the non-uniform rod is stated in this article. The exact solution of the stated problem is offered under the condition of the weak heterogeneity.

Одним из путей построения усложненных, по сравнению с классическими, моделей материалов и конструкций является учет зависимости механических и жесткостных характеристик от координат. Широта класса неоднородных тел определяет большое практическое значение постановки задач механики и разработки эффективных методов их решения.

В качестве примера возьмем уравнение продольных упругих колебаний неоднородного стержня. Математическая постановка этой задачи хорошо изучена и обоснована и может быть найдена, например, в [1,2]. Уравнение описывающее распространение продольных упругих волн в неоднородном стержне:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(E \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \rho \ddot{u} = f(\xi, t), \quad (1)$$

где ξ – расстояние от торца стержня ($\xi = 0$) до данного сечения, $0 \leq \xi \leq l$;

l – длина стержня;

$E = \tilde{E}(\xi)F(\xi)$;

$\rho = \tilde{\rho}(\xi)F(\xi)$;

$\tilde{E}(\xi)$ – модуль Юнга;

$\tilde{\rho}(\xi)$ – плотность стержня;

$F(\xi)$ – площадь сечения стержня;

$f(\xi, t)$ – продольная распределенная сила. В случае действия внешней силы по торцам $f \equiv 0$;

$u = u(\xi, t)$ – продольное перемещение поперечного сечения стержня;

Уравнение (1) удовлетворяет начальному условию

$$u(\xi, 0) = \varphi(\xi). \quad (2)$$

Кроме того, предполагаем краевые условия:

1) Пусть на левом конце ($\xi = 0$) задана переменная во времени сила $p(t)$. Тогда при $\xi = 0$:

$$\left\{ E \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\}_{(0,t)} = p(t). \quad (3)$$

2) Пусть правый торец стержня упруго заделан, причем упругая реакция пропорциональна смещению торцевого сечения. Тогда при $\xi = l$:

$$\{\gamma u\}_{(l,t)} = \psi(t). \quad (4)$$

Для решения обратной задачи механики деформируемого твердого тела, необходимо из уравнения (1), предельных условий (2), (3), (4), а также дополнительных измерений (зависящих от спосо-

ба решения) определить механические характеристики стержня $\{E, \rho\}$, которые являются функциями от пространственной координаты.

Опираясь на метод решения обратных задач, описанный в [1], и исправляя допущенную в [1] некорректность решения задачи, показанную ниже, решим задачу, вначале полагая $\rho = const$.

Предположим слабую неоднородность жесткостных характеристик стержня, т.е.

$$E(\xi) = E^0 + \varepsilon E^\varepsilon(\xi), 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (5)$$

где $E^0 = const$ – модуль Юнга контрольного однородного стержня.

Далее полагаем E^0 и ρ известными.

Представим $u = u(\xi, t)$ в виде разложения по малому параметру ε :

$$u(\xi, t) = u^0(\xi, t) + \varepsilon u^\varepsilon(\xi, t). \quad (6)$$

Подставляя представления (5) и (6) в уравнение (1) и предельные условия (2), (3) и (4), получим

$$E^0 \frac{\partial^2 u^0}{\partial \xi^2} - \rho \ddot{u}^0 + \varepsilon \left[E^0 \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial \xi^2} - \rho \ddot{u}^\varepsilon \right] = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left(E^\varepsilon \frac{\partial u^0}{\partial \xi} \right) + O(\varepsilon^2), \quad (7)$$

с предельными условиями

$$u^0(\xi, 0) = \varphi(\xi), E^0 \left(\frac{\partial u^0}{\partial \xi} \right)_{(0,t)} = p(t), u^0(l, t) = \frac{\psi(t)}{\gamma}. \quad (8)$$

Уравнение (7) распадается на два:

$$E^0 \frac{\partial^2 u^0}{\partial \xi^2} - \rho \ddot{u}^0 = 0,$$

с предельными условиями (8) и

$$E^0 \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial \xi^2} - \rho \ddot{u}^\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(E^\varepsilon \frac{\partial u^0}{\partial \xi} \right) + O(\varepsilon^2), \quad (9)$$

с однородными предельными условиями:

$$u^\varepsilon(\xi, 0) = 0, \dot{u}^\varepsilon(\xi, 0) = 0, E^0 \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \xi} \right)_{(0,t)} + E^\varepsilon(0) \left(\frac{\partial u^0}{\partial \xi} \right)_{(0,t)} = 0, u^\varepsilon(l, t) = 0. \quad (10)$$

В качестве дополнительной информации, полученной в результате измерений, используются граничные значения:

$$u^\varepsilon(0, t) = \chi(t). \quad (11)$$

Ограничим вид базовых (контрольных) колебаний $\{u^0, E^0\}$:

$$u^0(\xi, t) = g(\xi) \sin(\alpha t + \omega). \quad (12)$$

Тогда из предельного условия (8):

$$u^0(l, t) = g(l) \sin(\alpha t + \omega) = \frac{\psi(t)}{\gamma},$$

$$(\gamma g(l)) \sin(\alpha t + \omega) = \psi(t),$$

определим параметры α, ω , предполагая что $\psi(t)$ имеет вид $\psi(t) = \beta \sin(\alpha t + \omega)$. Для определения функции $g(\xi)$, воспользуемся другим предельным условием в (8):

$$u^0(\xi, 0) = g(\xi) \sin \omega = \varphi(\xi), \quad (13)$$

$$g(\xi) = \frac{\varphi(\xi)}{\sin \omega}.$$

Из (12) и (13) получим:

$$u^0(\xi, t) = \frac{\varphi(\xi)}{\sin \omega} \sin(\alpha t + \omega). \quad (14)$$

Определим теперь $u^\varepsilon(\xi, t)$ из уравнения (9) и предельных условий (10). Подставляя (14) в (9), получим:

$$E^0 \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial \xi^2} - \rho \ddot{u}^\varepsilon = -\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(E^\varepsilon(\xi) \varphi'(\xi) \right) \sin(\alpha t + \omega). \quad (15)$$

При нахождении $u^\varepsilon(\xi, t)$ в [1] было указано, что $u^\varepsilon(\xi, t)$ нужно искать, решая систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} E^0 \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial \xi^2} - \rho \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial t^2} = 0, \\ v = \frac{\partial^2 u^\varepsilon(\xi, t)}{\partial t^2} + \alpha^2 u^\varepsilon(\xi, t). \end{cases} \quad (16)$$

Однако можно доказать, что найденное $u^\varepsilon(\xi, t)$ из решения системы (16), при подстановке в левую часть уравнения (15) дает некоторую произвольную функцию от двух переменных ξ, t , и дальнейшее выражение $E^\varepsilon(\xi)$ также содержит переменную t , что недопустимо, т.к. $E^\varepsilon(\xi)$ не должно зависеть от времени.

Покажем, как можно корректно определить $u^\varepsilon(\xi, t)$ в уравнении (15), чтобы полученное выражение для $E^\varepsilon(\xi)$ не содержало переменной t .

Левая часть этого уравнения должна иметь вид $f_1(\xi) \sin(\alpha t + \omega)$. Для выполнения этого условия будем искать решение для $u^\varepsilon(\xi, t)$ в виде

$$u^\varepsilon(\xi, t) = q(\xi) \sin(\alpha t + \omega) + F(\xi, t), \quad (17)$$

где q и F – некоторые произвольные функции от одной и двух переменных соответственно.

Подставляя (17) в (15) получим:

$$\begin{aligned} & \left[E^0 q''(\xi) + \rho \alpha^2 q(\xi) \right] \sin(\alpha t + \omega) + \left[E^0 \frac{\partial^2 F(\xi, t)}{\partial \xi^2} - \rho \frac{\partial^2 F(\xi, t)}{\partial t^2} \right] = \\ & = -\frac{1}{\alpha \cos \omega} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(E^\varepsilon(\xi) \psi'(\xi) \right) \sin(\alpha t + \omega). \end{aligned} \quad (18)$$

В левой части уравнения (18) мы получили два слагаемых, первое из которых имеет нужный нам вид $f_1(\xi) \sin(\alpha t + \omega)$, а второе является произвольной функцией от двух переменных. Для корректного решения необходимо избавиться от второго слагаемого, приравняв его нулю. Таким образом, уравнение (18) распадается на два уравнения:

$$\left[E^0 q''(\xi) + \rho \alpha^2 q(\xi) \right] \sin(\alpha t + \omega) = -\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(E^\varepsilon(\xi) \varphi'(\xi) \right) \sin(\alpha t + \omega), \quad (19)$$

$$E^0 \frac{\partial^2 F(\xi, t)}{\partial \xi^2} - \rho \frac{\partial^2 F(\xi, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (20)$$

Решение (20) в общем виде имеет вид формулы Даламбера:

$$\begin{aligned} F(\xi, t) &= h_1(k\xi + t) + h_2(k\xi - t), \\ k &= \sqrt{\frac{\rho}{E^0}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя (21) в (17) получим общее решение для $u^\varepsilon(\xi, t)$:

$$u^\varepsilon(\xi, t) = q(x) \sin(\alpha t + \omega) + h_1(k\xi + t) + h_2(k\xi - t).$$

Определим функции q , h_1 , h_2 из предельных условий (8), (10) и (11). Из краевого условия (8):

$$\begin{aligned} E^0 \left(\frac{\partial u^0}{\partial \xi} \right)_{(0,t)} &= p(t), \\ \left(\frac{\partial u^0}{\partial \xi} \right)_{(0,t)} &= \frac{p(t)}{E^0}. \end{aligned} \tag{22}$$

Из (22) и краевого условия (10) получим:

$$\begin{aligned} E^0 \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \xi} \right)_{(0,t)} + E^\varepsilon(0) \left(\frac{\partial u^0}{\partial \xi} \right)_{(0,t)} &= 0, \\ \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \xi} \right)_{(0,t)} &= -\frac{E^\varepsilon(0) p(t)}{E^0 E^0}. \end{aligned} \tag{23}$$

Из предельных условий (10), (11) и (23) получим следующую систему:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \xi} \right)_{(0,t)} = q'(0) \sin(\alpha t + \omega) + kh_1'(t) + kh_2'(-t) = -\frac{E^\varepsilon(0)}{(E^0)^2} p(t), \\ u^\varepsilon(\xi, 0) = \alpha q(\xi) \sin \omega + h_1'(k\xi) - h_2'(k\xi) = 0, \\ u^\varepsilon(0, t) = q(0) \sin(\alpha t + \omega) + h_1(t) + h_2(-t) = \chi(t). \end{cases}$$

Продифференцировав последнее уравнение по t , и решив систему, получим:

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{1}{2\alpha \sin \omega} \left(-\chi'(kz) - \chi'(-kz) + \frac{E^\varepsilon(0)}{k(E^0)^2} (p(kz) - p(-kz)) \right) + \\ &+ \frac{q(0)}{2 \sin \omega} (\cos(-\alpha kz + \omega) + \cos(\alpha kz + \omega)) + \frac{q'(0)}{2\alpha k \sin \omega} (\sin(\alpha kz + \omega) - \sin(-\alpha kz + \omega)). \end{aligned}$$

Поделив уравнение (19) на $\sin(\alpha t + \omega)$, получим ОДУ относительно E^ε :

$$E^0 q''(\xi) + \rho \alpha^2 q(\xi) = -\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial}{\partial \xi} (E^\varepsilon(\xi) \varphi'(\xi)). \tag{24}$$

Учитывая, что большинство слагаемых функции q имеет вид $\sin(\pm \alpha kz + \omega)$ и $\cos(\pm \alpha kz + \omega)$, а также то, что:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{\rho}{E^0}}, \\ E^0 (\sin(\pm \alpha kz + \omega))'' + \rho \alpha^2 (\sin(\pm \alpha kz + \omega)) &= \\ = (-E^0 \alpha^2 k^2 + \rho \alpha^2) \sin(\pm \alpha kz + \omega) &= (-\rho \alpha^2 + \rho \alpha^2) \sin(\pm \alpha kz + \omega) = 0, \\ E^0 (\cos(\pm \alpha kz + \omega))'' + \rho \alpha^2 (\cos(\pm \alpha kz + \omega)) &= 0, \end{aligned}$$

то, подставляя q в (24) получим:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\alpha \sin \omega} \left[E^0 k^2 \left(\chi'''(-k\xi) + \chi'''(k\xi) + \frac{E^\varepsilon(0)}{k(E^0)^2} (p''(k\xi) - p''(-k\xi)) \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{2\alpha \sin \omega} \left(\rho \chi'(-k\xi) + \rho \chi'(k\xi) + \frac{E^\varepsilon(0)}{k(E^0)^2} (p(k\xi) - p(-k\xi)) \right) = \\
 & = \frac{\rho}{2\alpha \sin \omega} \left(\chi'''(-\sqrt{\frac{\rho}{E^0}} \xi) + \chi'''(\sqrt{\frac{\rho}{E^0}} \xi) + \chi'(-\sqrt{\frac{\rho}{E^0}} \xi) + \chi'(\sqrt{\frac{\rho}{E^0}} \xi) \right) + \\
 & + \frac{\rho}{2\alpha \sin \omega} \frac{E^\varepsilon(0)}{k(E^0)^2} (p''(k\xi) - p''(-k\xi) + p(k\xi) - p(-k\xi)) = \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial}{\partial \xi} (E^\varepsilon(\xi) \varphi'(\xi)), \\
 & \frac{\rho}{2\alpha} \left(\chi'''(-\sqrt{\frac{\rho}{E^0}} \xi) + \chi'''(\sqrt{\frac{\rho}{E^0}} \xi) + \chi'(-\sqrt{\frac{\rho}{E^0}} \xi) + \chi'(\sqrt{\frac{\rho}{E^0}} \xi) \right) + \\
 & + \frac{\rho}{2\alpha} \frac{E^\varepsilon(0)}{k(E^0)^2} (p''(k\xi) - p''(-k\xi) + p(k\xi) - p(-k\xi)) = \frac{\partial}{\partial \xi} (E^\varepsilon(\xi) \varphi'(\xi)). \tag{25}
 \end{aligned}$$

Для определения E^ε , решим ОДУ(25). Интегрируя, получим:

$$\begin{aligned}
 E^\varepsilon \varphi'(\xi) &= \frac{\sqrt{\rho E^0}}{2\alpha} \left(-\chi''(-\sqrt{\frac{\rho}{E^0}} \xi) + \chi''(\sqrt{\frac{\rho}{E^0}} \xi) - \chi(-\sqrt{\frac{\rho}{E^0}} \xi) + \chi(\sqrt{\frac{\rho}{E^0}} \xi) \right) + \\
 & + \frac{E^\varepsilon(0)}{2\alpha E^0} \left(p'(k\xi) + p'(-k\xi) + \int_0^{k\xi} p(z) dz + \int_0^{-kz} p(z) dz \right) + C, \\
 E^\varepsilon &= \frac{\sqrt{\rho E^0}}{2\alpha \varphi'(\xi)} \left(-\chi''(-\sqrt{\frac{\rho}{E^0}} \xi) + \chi''(\sqrt{\frac{\rho}{E^0}} \xi) - \chi(-\sqrt{\frac{\rho}{E^0}} \xi) + \chi(\sqrt{\frac{\rho}{E^0}} \xi) \right) + \\
 & + \frac{E^\varepsilon(0)}{2\alpha \varphi'(\xi) E^0} \left(p'(k\xi) + p'(-k\xi) + \int_{\xi_0}^{k\xi} p(z) dz + \int_{\xi_0}^{-kz} p(z) dz \right) + \frac{C}{\varphi'(\xi)}.
 \end{aligned}$$

Из краевого условия $E^\varepsilon(0) = E_0^\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
 C &= E_0^\varepsilon \varphi'(0) + \frac{\sqrt{\rho E^0}}{2\alpha} (-\chi''(0) + \chi''(0) - \chi(0) + \chi(0)) + \\
 & + \frac{\sqrt{\rho E^0}}{2\alpha} \frac{E_0^\varepsilon}{k(E^0)^2} \left(p'(0) + p'(0) + \int_{\xi_0}^0 p(z) dz + \int_{\xi_0}^0 p(z) dz \right) = \\
 & = E_0^\varepsilon \varphi'(0) + \frac{E_0^\varepsilon}{\alpha E^0} \left(p'(0) + \int_{\xi_0}^0 p(z) dz \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, окончательное решение имеет вид:

$$E^\varepsilon = E^\varepsilon = \frac{\sqrt{\rho E^0}}{2\alpha\varphi'(\xi)} \left[-\chi''\left(-\sqrt{\frac{\rho}{E^0}}\xi\right) + \chi''\left(\sqrt{\frac{\rho}{E^0}}\xi\right) - \chi\left(-\sqrt{\frac{\rho}{E^0}}\xi\right) + \chi\left(\sqrt{\frac{\rho}{E^0}}\xi\right) \right] +$$

$$+ \frac{\sqrt{\rho E^0}}{2\alpha\varphi'(\xi)} \frac{E^\varepsilon(0)}{k(E^0)^2} \left(p'(k\xi) + p'(-k\xi) + \int_{\xi_0}^{k\xi} p(z)dz + \int_{\xi_0}^{-k\xi} p(z)dz \right) +$$

$$+ E_0^\varepsilon + \frac{E_0^\varepsilon}{\alpha E^0 \varphi'(\xi)} \left(p'(0) + \int_{\xi_0}^0 p(z)dz \right),$$

где ρ, E^0 – константы – известные характеристики контрольного однородного стержня;
 ω – константа, получаемая из известной функции $\psi(t)$ в граничном условии (4);
 φ – известная функция из граничного условия (2);
 χ – известная функция – дополнительная информация, полученная в результате измерений, из граничного условия (11).

Теперь решим задачу для случая, когда $\rho = \rho(\xi)$. Решение задачи аналогично случаю когда $\rho = const$.

Полагая

$$\rho = \rho^0 + \varepsilon\rho^\varepsilon,$$

и ρ^0 известным, вместо (7) имеем:

$$E^0 \frac{\partial^2 u^0}{\partial \xi^2} - \rho^0 \ddot{u}^0 + \varepsilon \left[E^0 \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial \xi^2} - \rho^0 \ddot{u}^\varepsilon \right] = \varepsilon \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} \left(E^\varepsilon \frac{\partial u^0}{\partial \xi} \right) + \rho^\varepsilon \ddot{u}^0 \right] + O(\varepsilon^2). \quad (26)$$

Значение u^ε будет такими же, как и в случае $\rho = const$ (заменяя ρ на ρ^0)

Для определения E^ε и ρ^ε проведем 2 различных испытания, при этом параметры испытания $\{\chi, \varphi, \psi, \rho\}^{(i)}$ (где i – номер испытания) подберем такими, чтобы $u^{\varepsilon(i)}$ были различными. В обоих испытаниях значения E^ε и ρ^ε не меняются, откуда из (26) имеем систему ОДУ:

$$\begin{cases} E^0 \frac{\partial^2 u^{\varepsilon(1)}}{\partial \xi^2} - \rho^0 \ddot{u}^{\varepsilon(1)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(E^\varepsilon \frac{\partial u^{0(1)}}{\partial \xi} \right) + \rho^\varepsilon \ddot{u}^{0(1)}, \\ E^0 \frac{\partial^2 u^{\varepsilon(2)}}{\partial \xi^2} - \rho^0 \ddot{u}^{\varepsilon(2)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(E^\varepsilon \frac{\partial u^{0(2)}}{\partial \xi} \right) + \rho^\varepsilon \ddot{u}^{0(2)}. \end{cases} \quad (27)$$

Решая систему (27), найдем E^ε и ρ^ε .

Список литературы

1. Ломазов В.А. Задача диагностики неоднородных термоупругих сред. – Орел: ОрелГТУ, 2003. – 127 с.
2. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984. – 264с.

Берестовицкий Э.Г.

Гладилин Ю.А.

Лебедев С.В.

Санкт-Петербург, ГУП НПО «Аврора»

e-mail: avroru@avrorasystems.com; berest40@mail.ru; gladil_01@mail.ru.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ ВИБРОАКТИВНОСТИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ В СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ РАБОТЫ

В гидравлических приборах при течении жидкости в каналах и ее дросселировании возникают кавитация жидкости [1] и турбулентные потоки в проточной части возникающих при достаточно низких скоростях течения жидкости. Это приводит к резкому повышению виброактивности приборов и эрозии дросселирующих элементов, вплоть до их разрушений.

1. Кавитация

Существует несколько разновидностей кавитации [1], но физическая природа ее проявлений одинакова. Не вдаваясь в детали процесса ее возникновения, которые рассмотрены [2,3] кавитацию жидкости можно охарактеризовать как появление в потоке зон с растягивающим напряжением, которое превышает прочность жидкости на разрыв, что приводит к росту парогазовых каверн. При выходе каверн из зоны действия растягивающих напряжений возникает обратный процесс - их смыкание, который определяет гидродинамический шум при кавитации.

Для проектирования гидравлических устройств предлагается использовать критерий кавитации, отражающий особенности проточной части, в виде

$$k = \frac{P_{сл} - P_{нп}}{\rho \cdot V^2} \quad (1)$$

где $P_{сл}$ - давление в сливе; V - скорость жидкости в струе.

При выполнении условия

$$P_{сл} - P_{нп} = \frac{\rho \cdot V^2}{2}$$

гидростатическое давление в струе равно давлению насыщенного пара при температуре жидкости.

Из определения следует, что критическое число $K = 1$, т.е. при $K < 1$ возникает кавитация, а при $K > 1$ кавитация отсутствует.

Критерий кавитации (1) позволяет оценить состояние жидкости непосредственно в месте возникновения кавитации.

Гидравлические приборы проектируются с учетом характеристик конкретных систем, источника гидравлического питания и исполнительных устройств, поэтому вид проточной части определяет возникновение кавитации и уровень виброактивности при заданных режимах.

В общем случае гидравлическое устройство содержит нерегулируемые местные и распределенные по длине сопротивления, образуемые поворотами, проточками и каналами, а также регулируемые сопротивления дросселирующих элементов типа шток-седло, золотник-гильза.

Обобщенное представление гидравлической характеристики устройства $Q = Q(h)$ и критерий кавитации (1) позволяют определить области потока, где существует кавитация.

Связь между гидравлической характеристикой устройства с заданной проточной частью и перепадом давления в соответствии с уравнением Бернулли имеет вид:

$$Q = \sqrt{\frac{P_1 - P_2}{\rho \cdot \left(\sum_{i=1}^m \xi_i \frac{1}{2 \cdot f_i^2} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\ell_j}{d_j} \frac{1}{2 \cdot f_j^2} \right) + \rho \sum_{k=1}^p \xi_k(h) \frac{1}{2 \cdot f_k^2(h)}}} \quad (2)$$

где p_1, p_2 – давление на входе и выходе устройства;
 $\xi_i, \xi_k(h)$ – нерегулируемое и регулируемое сопротивление;
 f_i, f_j – площадь поперечных сечений нерегулируемых местных
 и распределенных сопротивлений;
 $f_k(h)$ – площадь k -го регулируемого поперечного сечения в зависимости от хода подвижно-
 го элемента;
 λ_j – коэффициент потерь в канале длиной ℓ_j и диаметром d_j .

Из зависимости (2) следует, что эффективное регулирование расхода возможно, если при лю-
 бом заданном значении выполняется неравенство.

$$\sum_{k=1}^p \xi_k(h) \frac{1}{2 \cdot f_k^2(h)} \gg \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{1}{2 \cdot f_i^2} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\ell_j}{d_j} \frac{1}{2 \cdot f_j^2}. \quad (3)$$

В конструкциях гидроусилителей и клапанов условие (3) выполняется, если имеет место со-
 отношение

$$f_k(h) \ll f_i(j)$$

Неразрывность потока жидкости позволяет получить связь между скоростью потока на каска-
 де дросселирования и в нерегулируемой проточной части с площадью

$$V_k(h) = \frac{V_i \cdot f_i}{f_k(h)}. \quad (5)$$

С учетом (4), (5) получим соотношение $V_k(h) \gg V_i$. Это условие определяет источник воз-
 никновения кавитации на регулируемом дросселирующем элементе, в соответствии с критерием ка-
 витации на нем

$$K_k = \frac{p_k(h) - p_{\text{нп}}}{\rho \cdot \frac{V_k^2(h)}{2}}, \quad (6)$$

где $p_k(h)$ – давление в струе на выходе из дросселирующего элемента;

$V_k(h)$ – скорость струи.

Из анализа критерия (6) следуют рекомендации по уменьшению или исключению кавитации в
 гидравлическом устройстве:

- уменьшение скорости $V_k(h)$ на каскаде дросселирования;
- увеличение противодавления на выходе дросселирующего элемента.

При неравномерной эпюре скорости течения жидкости критерии кавитации, рассчитанный по
 среднему значению $V_k^{\text{ср}}$ приводит к уменьшению запаса по кавитации.

Введем понятие зоны кавитации, над которой будем понимать часть области течения через
 каскад дросселирования, в которой возникают растягивающие напряжения, достаточных для образо-
 вания каверн.

Пусть скорость потока по меридианальному сечению определяется функцией

$$V_k = V_{\text{max}} \cdot \varphi(\text{Re} \xi, y) \quad (7)$$

тогда расход жидкости через сечение F равен

$$Q = \int_F V_k df.$$

Максимальная скорость потока определится из зависимости

$$V_{\max} = \frac{Q}{\int_F \varphi(\text{Re}, \xi, y) df} \quad (8)$$

В зоне действия V_{\max} возникают наибольшие растягивающие напряжения, и в соответствии с критерием (6) кавитация проявляется наиболее интенсивно.

Увеличение V_{\max} приводит к расширению зоны кавитации. Линия $K = K_{кр}$ в области течения образует границу зоны кавитации, зная которую можно определить величину расхода жидкости через нее.

Изменение давления $p_k(h)$ также существенно влияет на зону кавитации, при увеличении давления происходит ее сужение и при достижении равенства

$$p_k(h) - \frac{\rho \cdot V_{\max}^2}{2} = p_{нп} \quad (9)$$

наступает критическое состояние.

Конструктивное исполнение каскада дросселирования существенно влияет на эпюру скоростей потока, обтекающего сопротивление и, следовательно, на интенсивность кавитации и зону ее распространения.

В общем случае обтекание сложных профилей проточных частей не позволяет теоретически определить распределение скоростей в сечении.

Теоретические результаты, полученные при рассмотрении обтекания различных тел: сферы, цилиндра, острой кромки показывают существенное возрастание скорости на поверхности упомянутых тел. Учитывая, что проточные части состоят из фрагментов этих тел, рассмотрим распределение скорости на них. При обтекании сферического профиля распределение скоростей по поверхности подчиняется закону

$$V_{\Theta} = \frac{3}{2} V_{\infty} \sin(\Theta) \quad (10)$$

отсюда следует, что при $\Theta = 90^\circ$, $V_{\Theta} = \frac{3}{2} V_{\infty}$.

Убывание скорости от поверхности сферы пропорционально зависимости

$$V_r \sim \left(\frac{a}{r}\right)^3 V_{\Theta} \quad (11)$$

Обтекание цилиндрической части профиля сопровождается еще более интенсивным повышением скорости в соответствии с зависимостью

$$V = 2 \cdot V_{\infty} \sin \Theta \quad (12)$$

При $\Theta = 90^\circ$ скорость достигает максимального значения

$$V_{\Theta} = 2 \cdot V_{\infty}$$

Безотрывное обтекание острой кромки теоретически приводит к бесконечной скорости на самой кромке. Такой результат является следствием принятых при анализе допущений, которые не позволяют получить физически достоверную картину обтекания. При бесконечной скорости в жидкости возникают бесконечно большие растягивающие напряжения, разрывающие жидкость, в месте разрыва образуются кавитационные полости с давлением насыщенного пара. Фиксируя это явление акустическими измерениями или визуальным методом, можно, измерив, давление в потоке и температуру жидкости, определить приближенно значение максимальной скорости потока на обтекаемой поверхности при обработке результатов по формуле

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_{сл} - p_{нп})}{\rho}} \quad (13)$$

и фактическое минимальное число кавитации.

Рассмотрим истечение жидкости через отверстие, которое в общем случае может быть образовано острой кромкой, кромкой с утолщением, кромкой, имеющей срез по потоку или закругление.

Для отверстия с острой кромкой коэффициент сопротивления, приведенный к средней скоро-

сти жидкости в сечении при

$$Re = \frac{V_0 \cdot D_0}{\nu} \geq 10^5$$

определяется зависимостью

$$\xi_1 = \left(1 + 0.707 \cdot \sqrt{1 - \frac{F_0}{F_1} - \frac{F_0}{F_2}} \right)^2. \quad (14)$$

В общем случае коэффициент сопротивления отверстия равен

$$\xi_2 = \xi' \left(1 - \frac{F_0}{F_1} \right) + (1.414 - \tau) \sqrt{1 - \frac{F_0}{F_1} \left(1 - \frac{F_0}{F_2} \right)} - \xi_{тр}, \quad (15)$$

где ξ' – поправка, определяющая влияние длины кромки, срезанной по потоку или радиуса закругления кромки;

τ – поправка, определяющая влияние толщины кромки отверстия;

$\xi_{тр}$ – поправка, определяющая влияние длины отверстия.

Переход от острой кромки отверстия к любой другой форме уменьшает коэффициент сопротивления отверстия на величину

$$\Delta \xi = (0.5 - \xi') \left(1 - \frac{F_0}{F_1} \right) + (1.414 - \tau) \sqrt{1 - \frac{F_0}{F_1} \left(1 - \frac{F_0}{F_2} \right)} - \xi_{тр}. \quad (16)$$

Это значит, что при заданном перепаде давления и расходе жидкости через отверстие, например, образуемого в клапане гидравлического устройства, у которого вместо острой кромки выполнена любая другая форма, произойдет увеличение средней скорости течения жидкости, в связи с уменьшением площади проходного сечения, так как средняя скорость жидкости в отверстии равна

$$V = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta P}{\rho}}. \quad (17)$$

Число кавитации на таком отверстии, рассчитанное по средней скорости меньше, чем в случае отверстия с острой кромкой и, следовательно, оно является более виброактивным.

Такой вывод экспериментальными исследованиями не подтверждается. Противоречие теоретических и экспериментальных результатов устраняется, если допустить, что при обтекании острой кромки скорость потока на ней и вблизи нее выше средней по сечению отверстия и выше чем при обтекании кромки любого другого профиля.

Узкая зона кавитации, появляющаяся на начальной стадии развития мало влияет на изменение расхода жидкости через гидравлическое устройство, так как основная часть жидкости не претерпевает разрыва, в связи с чем функциональные характеристики гидравлических устройств практически не меняется. Поэтому при исследовании кавитации в гидравлических устройствах характерным признаком ее является изменение виброактивности, а не изменение расходной характеристики.

Используя некоторые допущения, принятые при рассмотрении акустического излучения в работах [2], а также учитывая результаты Гаррисона [4] по оценке акустической энергии при смыкании сферической каверны, имеем следующую связь акустической и потенциальной энергии

$$\frac{4\pi \cdot r^2}{\rho \cdot c} \int_0^{\infty} P^2(t) dt \approx 0.3 \frac{4}{3} \pi \cdot R_0^3 \cdot P_{\infty}, \quad (18)$$

где r – радиус сферы, на котором определяется величина акустического излучения;

R_0 – начальный радиус сферической каверны;

c – скорость звука в среде;

P_{∞} – давление в зоне смыкания каверн;

$P(t)$ – импульс давления при смыкании каверн.

Уровень звукового давления представим в виде [6]

$$L = 20 \lg \frac{\sqrt{\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot r^2} P_{\infty} \sqrt{1 - K_{\min}} \beta \cdot \rho \cdot c \cdot \xi \cdot \alpha \cdot Q}}{2 \cdot 10^{-4}} \quad (19)$$

Формула (19) позволяет оценить на стадии проектирования общий уровень звукового давления при кавитации жидкости в гидравлическом устройстве в зависимости от конструктивных параметров, режимных характеристик и свойств жидкости.

Акустическая энергия при схлопывании каверн передается на корпус гидравлического устройства и возбуждает его вибрацию, которая через опоры устройства распространяется структуре.

В работе [2] показана связь между вибрацией механизма и колебательной энергией, передаваемой через опорные связи

$$W = \overset{\bullet}{q}^2 \operatorname{Re} Z_a = \frac{\overset{\bullet\bullet}{q}^2}{4 \cdot \pi^2 f^2} \operatorname{Re} Z_a, \quad (20)$$

где $\overset{\bullet}{q}$, $\overset{\bullet\bullet}{q}$ – колебательная скорость и ускорение соответственно в точке контроля вибрации;
 $\operatorname{Re} Z_a$ – действительная часть механического сопротивления амортизированного крепления

$$\operatorname{Re} Z_a = \eta \frac{c}{\omega}, \quad (21)$$

где $\eta = 0.1$ – коэффициент потерь в амортизирующих креплениях;
 c – жесткость амортизированного крепления

$$c = M \cdot \omega^2 = M \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot f_0^2, \quad (22)$$

где M – масса устройства;
 f_0 – собственная частота колебаний амортизированного устройства;
 ω – угловая частота колебаний.

Если принять допущение, что колебательная энергия при схлопывании каверн передается через конструкцию гидравлического устройства без потерь, то получим формулу для расчета уровней вибрации гидравлического устройства, возникающих при кавитационном течении жидкости в виде

$$L = 10 \lg \frac{P^{*2} (2\pi \cdot r)^{-1} (4\pi^2 f^2 + \frac{1}{a^2})^{-1}}{W_0} - 10 \lg M - 20 \lg f_0 + 30 \lg f - 72, \quad (23)$$

где $L = 20 \lg \frac{\overset{\bullet\bullet}{q}}{q_0}$ – уровень вибрации по ускорению
 q_0

$$P^* = \sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot r^2} P_{\infty} \sqrt{1 - K_{\min}} \beta \cdot \rho \cdot c \cdot \xi \cdot \alpha \cdot Q}. \quad (24)$$

Полученная зависимость позволяет производить оценку вибрации гидравлического прибора от кавитации.

2. Турбулентность

В гидравлических приборах при течении в каналах и дросселировании турбулентные потоки возникают при достаточно низких скоростях течения жидкости. Это вызвано конструктивными особенностями гидравлических приборов, которые, как правило, содержат каналы малой длины, с большим количеством местных сопротивлений.

Турбулентность жидкости возбуждает вибрацию твердых границ потока, которая распространяется по опорным и неопорным связям. Ее величина зависит от скорости течения жидкости в проточной части [5]. Можно выделить два характерных значения скорости жидкости:

$$\text{-- в каналах } v_k = \frac{4Q}{\pi d_k^2};$$

– в дросселирующих сечениях $v_k = \mu \sqrt{\frac{2g}{\gamma} \Delta P}$;

ΔP – перепад давления на дросселирующем сечении.

Величина скорости v_k зависит от расхода Q и конструктивного размера - диаметра d_k канала. Определение скоростей v_k и v является результатом рассмотрения задачи о минимизации массогабаритных характеристик гидроприборов и их виброакустических характеристик.

В связи с этим требуется определить допустимую скорость потока, при наличии которой виброакустические характеристики не будут превышать заданные требования:

$$B_L = L^{gon}(f) - L(f), \quad (25)$$

где $L^{gon}(f)$ – допустимая характеристика (шум или вибрация);

$L(f)$ – фактическая характеристика (шум или вибрация).

При интегральной оценке можно использовать формулу Латхилла

$$P = \frac{k \cdot \rho_0 A \cdot v_{(k)}^8}{a_0^5}, \quad (26)$$

где P – звуковая мощность;

ρ_0 – плотность окружающей среды;

A – поперечное сечение струи;

$v_{(k)}$ – скорость жидкости в струе или в канале;

a_0 – скорость звука в окружающей среде;

k – безразмерная постоянная, называемая постоянной Латхилла.

Если принять, что вся энергия, порождаемая турбулентностью возбуждает конструкцию, то значение характеристики определится соотношением [5]

$$W = 20 \lg \frac{q}{q_0} + 10 \lg M + 20 \lg f_0 - 30 \lg f + 72. \quad (27)$$

Для оценки частотных составляющих характеристик воспользуемся решением Коркоса, которое позволяет заключить, что среднеквадратичное значение звукового давления \bar{P}^2 на некотором расстоянии пропорционально среднеквадратичному значению местной турбулентной пульсации давления и четвертой степени характерной частоты турбулентных пульсаций ω :

$$\bar{P}^2 = \left(\frac{1}{a_0^4} \right) \omega_*^4 \cdot \bar{v}'^2, \quad (28)$$

частота турбулентных пульсаций определяется соотношением

$$\omega_* = Sh \cdot \frac{v}{L}, \quad (29)$$

где L – характерный размер в зоне смешения струи.

Величина \bar{P}^2 пропорциональна v'^4 (где $v' = \sqrt{\bar{v}'^2}$ – среднеквадратичное значение осевой составляющей пульсационной скорости).

Следовательно, среднеквадратичное значение звукового давления пропорционально

$$\bar{P}^2 \approx \left(\frac{1}{a_0^4} \right) \omega_*^4 \cdot v'^4 \quad (30)$$

или

$$\bar{P}^2 \approx \eta \cdot \left(\frac{1}{a_0^4} \right) \omega_*^4 \cdot \rho^2 \cdot v^4 \cdot A^2, \quad (31)$$

где A – площадь струи;
 η – коэффициент пропорциональности.

Принимая, что излучение происходит в виде сферической волны, имеем мощность излучения:

$$W = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \frac{\bar{P}^2}{\rho \cdot c}, \quad (32)$$

где r – радиус сферы, на котором производится измерение.

Тогда, учитывая, что $\omega = 2\pi \cdot f$ получим

$$L = 10 \lg \frac{64\pi^5 \eta \rho v^4 f^4 A^2 r^2}{c^5 W_0} - 10 \lg M - 20 \lg f_0 + 30 \lg f_i - 72. \quad (33)$$

Диапазон изменения f определяется зависимостью (29). При наличии нескольких характерных скоростей жидкости в проточной части имеем

$$L = 10 \lg \sum_{i=1}^n \frac{64\pi^5 \eta \rho v_i^4 f_i A^2 r^2}{c^5 W_0} - 10 \lg M - 20 \lg f_0 + 30 \lg f_i - 72. \quad (34)$$

Полученная зависимость позволяет оценить влияние важнейших параметров на интенсивность виброакустических характеристик от турбулентности, но является предварительной и будет уточняться в процессе выполнения экспериментальных работ.

Для количественного определения зависимости вибрации прибора от турбулентности потока необходимо знать распределение скорости потока по сечению и диапазон ее флуктуации.

Заключение

Проведенные теоретические исследования влияния кавитации и турбулентности на виброакустические характеристики гидроприборов позволяют существенно снизить их виброшумоактивность уже на стадии проектирования, так как позволяют оптимизировать гидродинамические процессы. Наиболее приоритетным для снижения виброактивности гидроприборов является исключение кавитационных режимов работы, что достигается соблюдением заданного критерия кавитации при проектировании.

Список литературы

1. Арзуманов Э.С. Кавитация в местных гидравлических сопротивлениях. – М., Энергия, 1978.
2. Левковский Ю.Л. Структура кавитационных течений. – Л., Судостроение, 1978.
3. Перник А.Д. Проблемы кавитации. – Л., Судостроение, 1972.
4. Harrison M. An experimental study of single bubble cavitation noise. – IASA. – 1952. – V.24. – N6. – P. 776-781.
5. Минович И.Я., Перник А.Д., Петровский В.С. Гидродинамические источники звука. – Л.: Судостроение, 1972.

УДК 539.3

Верижников А.П., студент

(Орловский государственный технический университет)

К РАСЧЕТУ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Анализируются некоторые свойства асимптотических решений задачи об изгибных колебаниях неоднородных стержней с периодической структурой, то есть случаи, когда функции неоднородности периодические.

В монографии [1] предложена асимптотическая формула для расчета частот P_{nj} собственных изгибных колебаний стержней с произвольными законами распределения жесткости $G = G(\xi)$ и плотности $S = S(\xi)$ вдоль оси ξ стержня

$$P_{nj}^{1/2} = \lambda_{nj} B^{-1} + \frac{1}{\lambda_{nj}} F_{nj}, \tag{1}$$

где λ_{nj} – частоты собственных изгибных колебаний соответствующих однородных стержней;
 n – номер частоты;
 j – символ, указывающий на условия опирания стержня ($j = 1$ – защемление концов, $j = 2$ – консоль, $j = 3$ – свободное опирание, $j = 4$ – свободные концы);
 B – главный член асимптотики, не зависящий от условий опирания

$$B^{-1} = \int_0^1 \left(\frac{S}{G} \right)^{1/4} d\xi, \tag{2}$$

F_{nj} – коэффициенты, содержащие граничные значения функций $G(\xi)$ и $S(\xi)$ [1].

Анализ формул для F_{nj} показывает, что для стержней с равными на концах $\xi = 0$ и $\xi = 1$ значениями функций S и G и их первых производных, то есть при выполнении условий

$$S(0) = S(1), \quad S'(0) = S'(1), \quad G(0) = G(1), \quad G'(0) = G'(1) \tag{3}$$

второй член формулы (1) обращается в ноль при любом характере неоднородности (кроме консольного стержня, $j = 2$). Тогда частоты определяются по формуле

$$P_{nj} = \left(\frac{\lambda_{nj}}{B} \right)^2. \tag{4}$$

В случае обращения в ноль производных функций S и G на концах стержня

$$S'(0) = S'(1) = G'(0) = G'(1) = 0 \tag{5}$$

во всех случаях опирания частоты рассчитываются по формуле (4).

Применение формулы (4) возможно также и при других сочетаниях конечных значений функций S и G и их первых производных. Например, в случае консольного стержня с заделкой в $\xi = 0$ частоты рассчитываются по упрощенной формуле (4) при условиях

$$\frac{S'(1)}{S(1)} = \frac{G'(1)}{G(1)}, \quad 5 \frac{S'(0)}{S(0)} = \frac{G'(0)}{G(0)}.$$

Рассмотрим некоторые свойства формулы (4) в случае периодичности функций $S(\xi)$ и $G(\xi)$, являющихся коэффициентами дифференциального уравнения колебаний стержня [1]

$$\frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(G(\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + S(\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0.$$

Пусть S и G – произвольные периодические функции с периодами соответственно T_S и T_G , то есть

$$S(\xi + T_S) = S(\xi), \quad G(\xi + T_G) = G(\xi), \quad (6)$$

удовлетворяющие условиям (3) или (5).

Назовем циклом функции $A = A(\xi)$ совокупность последовательных значений ее за период. Наибольшее и наименьшее значения цикла обозначим A_{\max} и A_{\min} . Любой цикл может быть представлен как результат наложения постоянного значения функции A_m на значение, меняющееся по симметричному циклу с амплитудой A_a . При этом, очевидно

$$A_m = \frac{A_{\max} + A_{\min}}{2}, \quad A_a = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{2}.$$

В предположении, что по длине стержня укладывается целое число циклов функций S и G , то есть при выполнении условия (3) или (5), определим влияние на частоту колебаний стержня следующих факторов:

- количества циклов функций S и G ;
- амплитуд S_a и G_a циклов функций S и G .

Предварительно исследуем интеграл (2) с учетом свойств (6) подынтегральных функций. Заметим, что функции $S_1(\xi) = S^{1/4}(\xi)$ и $G_1(\xi) = G^{1/4}(\xi)$ будут также периодическими с периодами соответственно T_S и T_G . Введем, далее, в рассмотрение функции

$$s(\xi) = S_1\left(\frac{\xi}{\omega}\right), \quad g(\xi) = G_1\left(\frac{\xi}{\omega}\right),$$

где ω – некоторый отличный от нуля вещественный параметр (см. диаграмму на рисунке 1).

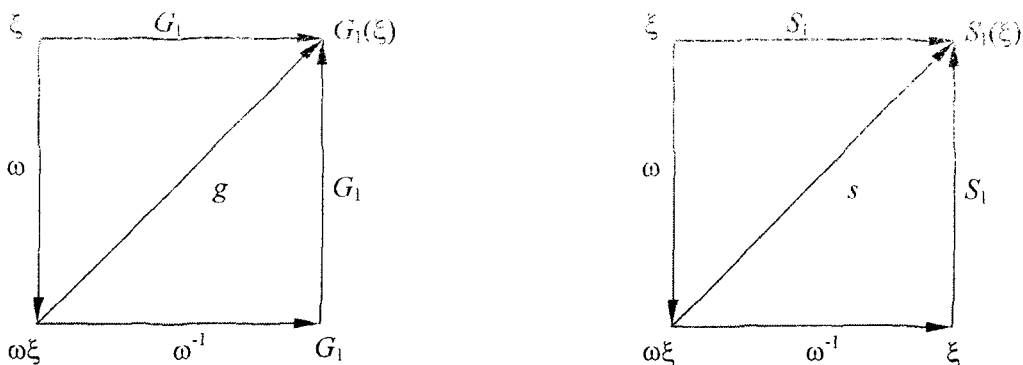


Рис. 1.

Интеграл (2) преобразуется к виду

$$B^{-1}(\omega) = \int_0^1 \frac{s(\omega\xi)}{g(\omega\xi)} d\xi, \quad (7)$$

причем $s(\omega\xi)$, $g(\omega\xi)$ – периодические функции с периодами соответственно

$$T_{1S} = \omega T_S, \quad T_{1G} = \omega T_G.$$

Заменяя переменную в интеграле (7) подстановкой $t = \omega\xi$, получим окончательный вид интеграла

$$B^{-1}(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \frac{s(t)}{g(t)} dt, \quad (8)$$

Предложение 1. Пусть функции $s(t)$ и $g(t)$ периодические, с периодами соответственно T_{1S} и T_{1G} ; кроме того $T_{1S} = \frac{p}{q} T_{1G}$, где p и q – натуральные числа.

Тогда, если $B^{-1}(\omega)$ – интеграл вида (8), то имеет место равенство

$$B^{-1}(T_0) = B^{-1}(mT_0), \tag{9}$$

где m – натуральное число, а

$$T_0 = qT_{1S} = pT_{1G}.$$

Для доказательства этого предложения заметим, что число T_0 является общим периодом функций $s(t)$ и $g(t)$, а, следовательно, и подынтегральной функции $F(t) = \frac{s(t)}{g(t)}$. Кроме того, для произвольного промежутка $[a, b]$ из области определения функции $F(t)$ и для любого натурального числа k имеет место равенство

$$\int_a^b F(t) dt = \int_{a+kT_0}^{b+kT_0} F(t) dt. \tag{10}$$

Действительно, произведя замену переменной $t = z + kT_0$ в правом интеграле равенства (10), получим

$$\int_{a+kT_0}^{b+kT_0} F(t) dt = \int_a^b F(z+kT_0) dz = \int_a^b F(z) dz.$$

Теперь, с учетом формулы (10), получим

$$\begin{aligned} B^{-1}(mT_0) &= \frac{1}{mT_0} \int_0^{mT_0} F(t) dt = \frac{1}{mT_0} \sum_{k=0}^{m-1} \int_{kT_0}^{(k+1)T_0} F(t) dt = \frac{1}{mT_0} \sum_{k=0}^{m-1} \int_{0+kT_0}^{T_0+kT_0} F(t) dt = \\ &= \frac{1}{mT_0} m \int_0^{T_0} F(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} F(t) dt = B^{-1}(T_0) \end{aligned}$$

и равенство (9) доказано.

Предложение 2. Пусть выполнены все условия предложения 1. Тогда для любого t_0 из области определения функции $F(t)$ имеет место следующая зависимость

$$B^{-1}(t_0 + mT_0) = \frac{t_0 B^{-1}(t_0) + mT_0 B^{-1}(T_0)}{t_0 + mT_0}. \tag{11}$$

Для доказательства этого утверждения запишем интеграл $B^{-1}(t_0 + mT_0)$ следующим образом

$$B^{-1}(t_0 + mT_0) = \frac{1}{t_0 + mT_0} \int_0^{t_0 + mT_0} F(t) dt = \frac{1}{t_0 + mT_0} \left[\int_0^{t_0} F(t) dt + \int_0^{mT_0} F(t) dt \right]$$

и в силу (8) окончательно получим (11), то есть и это предложение доказано.

Таким образом, из предложения 1 следует, что для стержней с периодическими неоднородностями $S(\xi)$ и (или) $G(\xi)$ главный член (2) асимптотики (1) не зависит от количества укладываемых по длине стержня циклов функций неоднородностей. Формула (11) из предложения 2 упрощает вычисление частот колебаний для стержней с неоднородностью, характеризуемой нецелым числом циклов функций неоднородностей по длине стержня.

Список литературы

1. Гордон В.А. Метод решения задач механики неоднородных тел / В.А. Гордон, В.С. Шоркин, М.И. Борзенков. – Орел: ОрелГТУ, 2005.

Волов Д.Б., канд. техн. наук, доцент кафедры «Физика и экологическая теплофизика»
(Самарская государственная академия путей сообщения)
г.Самара, тел. (8462) 995454; e-mail: volovdm@mail.ru

ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ В КАЧЕСТВЕ ИСТОЧНИКОВ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

In this work the numerical analysis results for efficiency of transformation a mechanical energy to radiation are presented, in view of arising thus pressure. Compression in two-stage ballistic plasmatron is considered. The intervals of some geometrical parameters corresponding work with the greatest efficiency are certain. It is shown, that similar installations can make a competition to traditional pulse sources of radiation in various areas of thermophysics.

Баллистические устройства сжатия в последнее время находят все большее применение в экспериментальной аэродинамике, плазмо- и фотохимии, а также в системах накачки твердотельных лазеров [1]. С этим связано появление и развитие нового направления, в котором целью является достижение высоких температур сжатого газа (8000-20000К) при сохранении давления на уровне, допустимом из условий прочности [2].

Необходимо, отталкиваясь от адиабатического способа сжатия, перераспределить энергию вдоль ствола таким образом, чтобы создать условия для дополнительного увеличения температуры. При адиабатическом сжатии давление газа быстро выходит на предельно допустимый уровень, определяемый прочностью установки, а температура при этом еще не достаточно высока для возникновения интенсивного излучения рабочего газа.

Развитие данного направления привело к созданию многостадийных баллистических плазмотронов, использующих при своей работе перепуск газа [1]. В настоящее время импульсные устройства подобного рода позволяют получать вещества при высоких температурах (до 15000К) и давлениях (до 2000атм) с плотностью более 100кг/м³. При таких температурах одноатомные благородные газы (ксенон, аргон и др.) ионизируются и интенсивно излучают.

Возникла задача транспорта излучения к потребителю с минимальными потерями.

В [3] для баллистических систем построен алгоритм с открытой архитектурой, предназначенный для составления математических моделей теплоэнергетических устройств с перепуском газа. Термодинамическая система разбивается на конечное число секций, устанавливаются их взаимосвязи и в дальнейшем рассматривается их взаимодействие [3].

Основой алгоритма является система уравнений, в матричном виде записываемая как

$$\frac{d}{dt} \left[\mathbf{M}, \mathbf{E}, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{m}_p \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} \right] = \left[\mathbf{S} * \rho \mathbf{u}, \mathbf{S} * (\mathbf{c}_p \mathbf{T} \rho \mathbf{u}), \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt}, \sigma \cdot \mathbf{p} \right] + \mathbf{Q}, \quad (1)$$

где вектор-столбцы:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho_1 V_1 \\ \rho_2 V_2 \\ \dots \\ \rho_n V_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} c_{v1} \rho_1 T_1 V_1 \\ c_{v2} \rho_2 T_2 V_2 \\ \dots \\ c_{vn} \rho_n T_n V_n \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \dots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}, \quad \rho \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho_1 u_1 \\ \rho_2 u_2 \\ \dots \\ \rho_n u_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_p \mathbf{T} \rho \mathbf{u} = \begin{bmatrix} c_{p1} T_1 \rho_1 u_1 \\ c_{p2} T_2 \rho_2 u_2 \\ \dots \\ c_{pn} T_n \rho_n u_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} g'_1, Q_1, 0, \bar{F}_1^* \\ g'_2, Q_2, 0, \bar{F}_2^* \\ \dots \\ g'_n, Q_n, 0, \bar{F}_n^* \end{bmatrix},$$

где ρ – плотность;
 V – объем;

$m = \rho V$ – масса газа;
 c_V – удельная теплоемкость при постоянном объеме;
 T – температура;
 x – координата вдоль движения;
 u – скорость;
 p – давление;
 S – площадь сечения канала;
 σ – площадь сечения секции;
 g' – мощность массовых источников;
 Q – мощность источников энергии;
 F – внешние силы;
 m_p – масса поршня;
 t – время;
 n – число секций.

Здесь и далее индекс указывает на номер секции. Черта над множителем показывает, что после перемножения матриц получаются векторные уравнения, которые нужно разложить по проекциям [3].

Решением этой системы при заданных начальных условиях является зависящая от времени матрица макросостояния $[\rho, T, dV/dt, V]$.

Задачей транспорта энергии излучения по каналам полисекционной системы является доставка максимально возможной энергии к выходной камере при прочих заданных условиях

$$E_{\Sigma} = \sum_i \left(\int_0^{\tau} Q_i dt + \int_0^{\tau} q_i dt \right) \rightarrow \max ,$$

где E_{Σ} – общая энергия, выделившаяся за время импульса τ в виде излучения; под знаком суммы подразумевается суммирование по всем источникам, кроме находящихся в выходной камере;

Q_i – мощность радиационных потерь в i -й секции;

q_i – мощность радиационных потерь в i -м канале.

Численные расчеты для двухстадийного плазмотрона [3] по модели, реализующей данный алгоритм, показывают, что максимальное давление в третьей секции наблюдается на ниспадающей ветви функции $m_3(t)$, причем температура в этот момент достигает абсолютного максимума, а объем самой секции минимален. В целом с увеличением диаметра выходного сопла предельное давление в стволе падает (рис. 1, 2). Однако существуют некоторые особенности: при больших диаметрах сопла поршня d_2 имеются горизонтальные участки, на которых давление практически не меняется. На режимах, соответствующих этим участкам, газ в первом пике сжатия перетекает преимущественно во вторую секцию, а не в четвертую. В стволе остается почти вся масса рабочего газа, которая и подвергается дальнейшему сжатию. А максимальное давление при прочих равных условиях определяется вкладываемой энергией (начальным давлением толкающего газа p_{01}). Поскольку начальное давление здесь одинаково, то и максимальное давление p_3 тоже постоянно.

Если d_c сопоставимо с d_2 , то часть вкладываемой энергии тратится на проталкивание газа в выходную камеру, и оставшийся в стволе газ сжимается уже до меньшего давления. Спад давления по d_c в среднем практически линейный (рис. 1, 2).

Пусть устройство обеспечивает необходимый уровень энергии излучения на выходе. Реализация конкретных устройств на практике [1] позволяет использовать такое предположение. Тогда эффективность работы устройства будем характеризовать отношением энергии излучения в камере (четвертой секции) E_4 к суммарной энергии излучения E_{Σ} . На рис. 3 *a, b* представлена зависимость этого отношения от диаметра выходного сопла d_c при различных диаметрах отверстия в поршне d_2 .

На малых диаметрах выходного сопла, когда большая часть рабочего газа не успевает попасть в камеру за время импульса, наблюдается монотонный рост отношения энергий при возрастании d_c . Если начальное давление $p_{01}=100$ атм, то имеется локальный максимум (рис. 3 *a*), соответствующий переходу порядка 50% массы газа в камеру.

Для больших d_c появляется «провал» (рис. 3 *a*), связанный с перераспределением энергии им-

пульса со второго пика давления на первый. По окончании этого перераспределения отношение энергий вновь растет, причем уже вся масса рабочего газа успевает перейти в выходную камеру. Второй пик давления в таком случае исчезает полностью. В данном случае рост отношения давлений превосходит соответствующие значения в локальном максимуме. Но нельзя забывать, что при $d_c > 0.016$ в связи с переходом всей массы газа в камеру возникает удар поршня о торец ствола – крайне нежелательное явление. Поэтому целесообразно выбирать меньшие значения d_c , вблизи локального максимума.

При начальных давлениях, больших $p_{01}=100$ атм, характерный «провал» сглаживается (на рис. не показано), а при $p_{01}=200$ атм исчезает вовсе (рис. 3 б). Все особенности, присущие различным d_2 , «стираются» и на $p_{01}=200$ атм проявляется куполообразная форма кривой E_4/E_Σ . Максимум ее соответствует перетеканию всего рабочего газа в выходную камеру.

Заметим, что максимальное отношение энергий E_4/E_Σ в случае $p_{01}=100$ атм больше, чем при $p_{01}=200$ атм. То есть количество промежуточных потерь излучения на маломощных установках ниже. Но и абсолютное значение энергии излучения для такой установки сравнительно невелико. Таким образом, в случае необходимости стоит идти на снижение эффективности работы устройства с целью получения больших энергий излучения в камере. Тем более что отношения энергий порядка 0.7-0.8 при $p_{01}=100$ атм соответствуют режимам работы с ударом поршня. Безударные режимы реализуются на более низких показателях эффективности (менее 0.6) (рис. 3 а). В любом случае значения диаметра выходного сопла следует выбирать из левой ветви куполообразной кривой во избежание удара поршня о стенку (рис. 3 б).

Таким образом, подобные установки могут составить конкуренцию традиционным источникам излучения в тех областях теплоэнергетики, где в первую очередь требуется независимость работы от источников электроэнергии. Правильный выбор соотношения диаметров сопел поршня и выпускного канала позволяет обеспечить преобразование энергии, по эффективности сопоставимое с достигаемым в электроразрядных импульсных источниках излучения.

Список литературы

1. Шмелев В.М., Марголин А.Д., Волов Д.Б. и др. Неэлектрический метод накачки твердотельных лазеров // Журнал технической физики. – 1998. – Т.68. – № 9. – С. 67-70.
2. Кислых В.В., Крапивной К.В. Использование неизотропического многокаскадного сжатия для получения плотного высокотемпературного газа // Теплофизика высоких температур. – 1990. – Т.28. – №6. – С. 1195-1203.
3. Волов Д.Б. Моделирование в полисекционных термодинамических системах // Инженерно-физический журнал. – 2004. – Т.77. – №4. – С. 132-144.

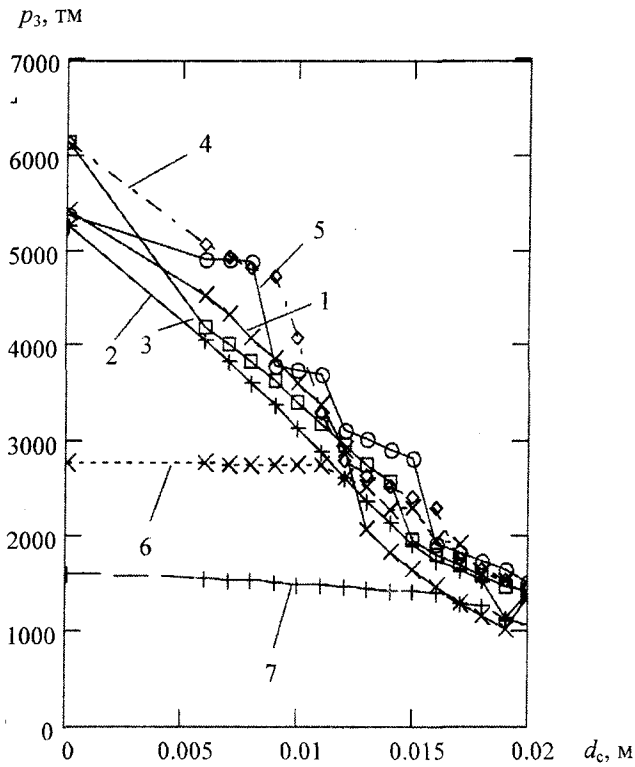


Рис. 1. Зависимость максимального давления в третьей секции от диаметра выходного сопла. Начальное давление толкающего газа $p_{01}=150$ атм. 1 - $d_2=0.003$ м, 2 - $d_2=0.004$ м, 3 - $d_2=0.005$ м, 4 - $d_2=0.006$ м, 5 - $d_2=0.007$ м, 6 - $d_2=0.009$ м, 7 - $d_2=0.011$ м

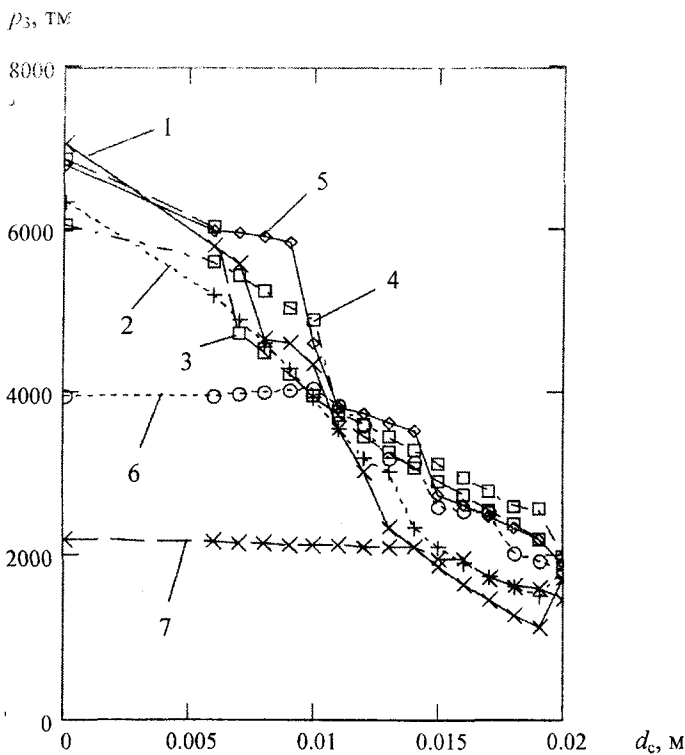


Рис. 2. Зависимость максимального давления в третьей секции от диаметра выходного сопла. Начальное давление толкающего газа $p_{01}=200$ атм. 1 - $d_2=0.003$ м, 2 - $d_2=0.004$ м, 3 - $d_2=0.005$ м, 4 - $d_2=0.006$ м, 5 - $d_2=0.007$ м, 6 - $d_2=0.009$ м, 7 - $d_2=0.011$ м

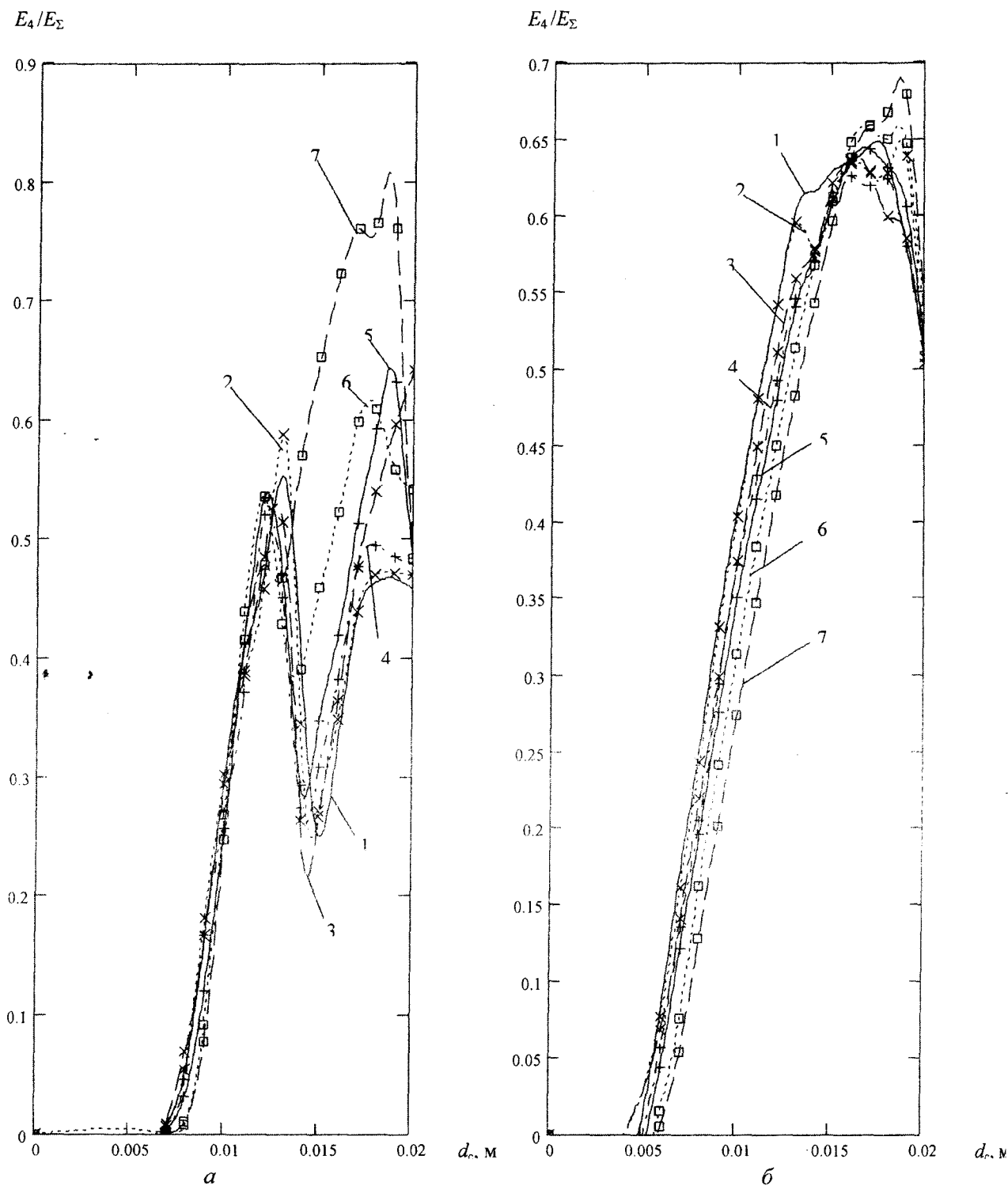


Рис. 3. Отношение энергии излучения в камере к суммарной энергии излучения в импульсе в зависимости от диаметра выходного сопла, *a* - $p_{01}=100$ атм, *b* - $p_{01}=200$ атм; 1 - $d_2=0.003$ м, 2 - $d_2=0.004$ м, 3 - $d_2=0.005$ м, 4 - $d_2=0.006$ м, 5 - $d_2=0.007$ м, 6 - $d_2=0.009$ м, 7 - $d_2=0.011$ м

УДК 539.3

*Деренговский А.Г., аспирант**(Орловский государственный технический университет)**г.Орел, тел. (4862) 763769; e-mail: Andrey_AD@mail.ru*

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ В УГЛОВЫХ ТОЧКАХ. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

В работе [1] А.А. Ильющин среди прочих существенных направлений дальнейшего развития механики отметил необходимость решение плоских и пространственных задач «...для областей тел со сложной конфигурацией при наличии угловых точек и ребер, разрезов, концентраторов напряжений». Резкое изменение формы деформируемого тела приводит к неравномерному распределению напряжений. Наличие концентратора вне зависимости от действия на него внешней силы (например, сосредоточенной силы на вершину клина – силы резания, действующей на режущую кромку инструмента), приводит к резкому возрастанию напряжений в непосредственной близости от него.

Напряжения в районе концентратора достигают предела прочности, предела текучести раньше, чем в других местах. Это приводит к локальному снижению прочности исследуемого образца. Ввиду сказанного, задача о напряженно-деформированном состоянии материала в окрестности концентратора напряжений постоянно сохраняет свою актуальность.

1. Классический подход. Рассматривается плоская задача о действии сосредоточенной силы на вершину бесконечного клина, имеющего угол разворота $\pi/2$. Сила F направлена вдоль биссектрисы угла (рисунок 1). Начало O прямоугольной координатной системы (X_1, X_2) помещается в вершине клина, а оси направлены вдоль его сторон. Клино занимает область

$$0 \leq x_k < \infty; k = 1, 2 \quad (1)$$

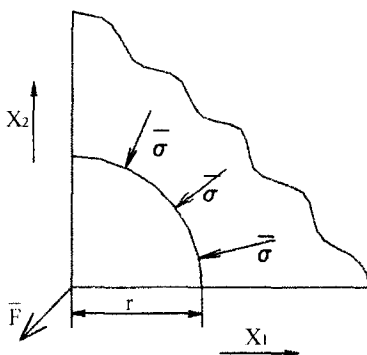


Рис. 1. Модель бесконечного клина

При классическом решении такой задачи сила определяется по формуле (2) [2]

$$F = \int_0^{\beta} \sigma \cdot r \cdot d\varphi = \sigma \cdot r \cdot \beta. \quad (2)$$

Следовательно, напряжение находится по формуле (3)

$$\sigma = \frac{F}{r \cdot \beta}. \quad (3)$$

При таком решении возникает ситуация, когда при стремлении радиуса, в котором определяется напряжение к нулю, напряжение возрастает до бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma = \infty. \quad (4)$$

В реальности такая ситуация не возможна. Поэтому для изучения описанной ситуации необходимо использовать неклассические методы.

2. Модель среды второго порядка. В работе [3] такие задачи предлагается решать с помощью систем дифференциальных уравнений, в которых задаются краевые условия не только на поверхности, но и в угловой точке. Эта система является системой уравнений равновесия и краевых условий для среды, в которой развиваются напряжения, описываемые не одним, а двумя тензорами напряжений. Система уравнений равновесия в перемещениях в плоском случае имеет вид [3]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta_1^2} + \frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta_2^2} + \frac{1+\lambda}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} &= \frac{\partial^4 u_1}{\partial \eta_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial \eta_1^2 \partial \eta_2^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial \eta_2^4} \\ \frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta_2^2} + \frac{1+\lambda}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} &= \frac{\partial^4 u_2}{\partial \eta_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial \eta_1^2 \partial \eta_2^2} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial \eta_2^4} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta_1^2} + \frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta_2^2} + \frac{1+\lambda}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} &= \frac{\partial^4 u_1}{\partial \eta_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial \eta_1^2 \partial \eta_2^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial \eta_2^4} \\ \frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta_2^2} + \frac{1+\lambda}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} &= \frac{\partial^4 u_2}{\partial \eta_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial \eta_1^2 \partial \eta_2^2} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial \eta_2^4} \end{aligned} \right\}$$

$$\lambda = \frac{A_2}{2 \cdot A_1}; \quad b^2 = \frac{2 \cdot B}{2 \cdot A_1}; \quad \eta_i = \frac{x_i}{b}; \quad i = 1, 2.$$

Краевые условия строятся на основании следующих соображений. Границы клина свободны от внешних воздействий. Следовательно, с учетом конституционных соображений можно записать: при $x_1 = 0$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - b^2 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} - 2b^2 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0. \quad (6)$$

$$\frac{1-\lambda}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - 2b^2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0. \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = 0. \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\pi_0}{2 \cdot A_1 B^2} = 0. \quad (9)$$

при $x_2 = 0$:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - b^2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2^3} - 2b^2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} = 0. \quad (10)$$

$$\frac{1-\lambda}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - 2b^2 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} = 0. \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = 0. \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\pi_0}{2 \cdot A_1 B^2} = 0. \quad (13)$$

при $x_1 \rightarrow \infty$:

$$u_1 = 0; \quad u_2 = 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0; \quad (14)$$

при $x_2 \rightarrow \infty$:

$$u_1 = 0; u_2 = 0; \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0; \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0. \quad (15)$$

3 Решение плоской задачи. Учитывая линейность решаемой задачи, вместо компонент вектора силы в вершине клина задаются компоненты вектора перемещений:

$$u_1 = u_2 = u_0. \quad (16)$$

В случае необходимости u_0 подбирается так, что компоненты вектора $\vec{F} = (F_0, F_0)$ достигают заданной величины.

Решение системы (5) ищется в виде:

$$u_1 = B_1 \xi_1^m \xi_2^n, \quad u_2 = B_2 \xi_1^m \xi_2^n, \quad (17)$$

где

$$\xi_k = e^{-\eta_k}; \quad k = 1, 2, \quad (18)$$

B_1, B_2, m, n – неизвестные постоянные.

При подстановке (17), (18) в (5) получается однородная система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных B_1, B_2 :

$$\begin{aligned} \left[(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 - 1) + \frac{1+\lambda}{2} n^2 \right] B_1 - \frac{1+\lambda}{2} mn B_2 &= 0, \\ \frac{1+\lambda}{2} mn B_1 - \left[(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 - 1) + \frac{1+\lambda}{2} n^2 \right] B_2 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Для получения ненулевого решения требуется:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left[(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 - 1) + \frac{1+\lambda}{2} n^2 \right] & \left(\frac{1+\lambda}{2} mn B_2 \right) \\ \left(\frac{1+\lambda}{2} mn \right) & \left[(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 - 1) + \frac{1+\lambda}{2} n^2 \right] \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

Это соотношение сводится к виду:

$$(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 - 1) \left(m^2 + n^2 - \frac{1-\lambda}{2} \right) = 0. \quad (21)$$

Следовательно, решение системы уравнений равновесия в форме (17) возможно, если хотя бы один из сомножителей левой части равенства (21) обращается в ноль. Для первого сомножителя это соответствует движению клина как абсолютно твердого тела, что исключается. Равенство нулю второго и третьего сомножителей означает:

$$m = \rho \cos \varphi; \quad n = \rho \sin \varphi; \quad (22)$$

или

$$m = \rho \sin \varphi; \quad n = \rho \cos \varphi, \quad (23)$$

где принимается

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}. \quad (24)$$

Для второго сомножителя

$$\rho = 1; \quad (25)$$

$$\rho = \sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}. \quad (26)$$

Далее внимание обращается на симметрию поставленной задачи и, как следствие, симметрию

ее решения. Поэтому можно считать, что u_1 , определенное для $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{4}$, совпадает с u_2 , определенным для $\frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$, и наоборот. Это дает возможность сосредоточить внимание только на поиске функции $u_1(x_1, x_2)$. Выражение (17) справедливо для любого $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{4}$. На основании этого можно доказать, что выражение:

$$u_1 = \int_{\varepsilon}^{\pi/4-\varepsilon} U_1(\varphi) \cos(\varphi) \xi_1^{\cos(\varphi)} \xi_2^{\sin(\varphi)} d\varphi, \tag{27}$$

удовлетворяет уравнениям равновесия. Учитывая это, принято $\rho = 1$, соотношения (23) не используются. Общее решение для $u_1(x_1, x_2)$ ищется в виде (27). Конкретный вид функции $U_1(\varphi)$ определяется из краевых условий. Они приобретают вид:

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/4-\varepsilon} U_1(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi = u_0 \tag{28}$$

– перемещение угловой точки, далее принимается равным 1.

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/4-\varepsilon} U_1(\varphi) \sin^2(\varphi) \left[(1-\lambda) - \sin^2 \varphi \right] \xi_2^{\sin(\varphi)} d\varphi = 0 \tag{29}$$

– отсутствие нормальных напряжений, при $x_1 = 0$.

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/4-\varepsilon} U_1(\varphi) \left[\sin(2\varphi) \left(\sin^2 \varphi - \frac{1-\lambda}{2} \right) \right] \xi_2^{\sin(\varphi)} d\varphi = 0 \tag{30}$$

– отсутствие касательных напряжений, при $x_1 = 0$.

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/4-\varepsilon} U_1(\varphi) \sin(\varphi) \cos^2 \varphi \xi_2^{\sin(\varphi)} d\varphi = 0 \tag{31}$$

– отсутствие напряжений, вызывающих изгиб материальных волокон, при $x_1 = 0$.

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/4-\varepsilon} U_1(\varphi) \sin^3(\varphi) \xi_2^{\sin(\varphi)} d\varphi + P_0 = 0, \quad P_0 = \frac{\pi_0}{2A_1} \tag{32}$$

– отсутствие напряжений, вызывающих неравномерность относительного удлинения вдоль волокна.

Производим подстановку и раскладываем функцию $\xi_2^{\sin(\varphi)}$ в ряд:

$$\gamma_2 = 1 - \xi_2^{\sin(\varphi)}. \tag{33}$$

$$\xi_2^{\sin(\varphi)} = 1 + \frac{\sin \varphi}{1!} \gamma_2 + \frac{\sin \varphi (\sin \varphi - 1)}{2!} \gamma_2^2 + \dots \tag{34}$$

Функцию $U_1(\varphi)$ раскладываем в следующий ряд:

$$U_1(\varphi) = x_1 \sin 2\varphi + x_2 \sin 4\varphi + x_3 \sin 6\varphi + \dots \tag{35}$$

Таким образом, при подстановке (33), (34), (35) в (28)-(32) получаем систему с бесконечным числом уравнений и таким же числом неизвестных. При использовании большего числа членов ряда (34) увеличивается число уравнений в системе, точность вычислений повышается. Можно показать, что существует принципиальная возможность получения единственного, ограниченного решения этой системы.

4. Числовой пример. В качестве примера рассмотрен случай, когда сосредоточенная сила действует на вершину клина, растягивая его (рис. 1). Компоненты вектора перемещений в вершине клина заданы следующим образом:

$$u_1 = u_2 = 1, \text{ т.е. } u_0 = 1.$$

Значение P_0 принято равным единице:

$$P_0 = 1.$$

При подстановке первого члена ряда (34) в (28)-(32) составляется система из пяти уравнений. Решение данной системы подставляется в (35). Полученное выражение используется для вычисления значения компоненты вектора перемещений $u_1(\eta_1, \eta_2)$ по формуле (27). Вычисленные таким образом значения функции $u_1(\eta_1, \eta_2)$ в окрестности вершины клина приведены в таблице 1 и на рисунке 2.

Таблица 1. Значения функции $u_1(\eta_1, \eta_2)$

η_1	η_2							
	0	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
0	1	1	0,956	0,871	0,752	0,603	0,425	0,221
0,2	0,75	0,767	0,731	0,665	0,572	0,454	0,312	0,148
0,4	0,55	0,578	0,553	0,504	0,431	0,338	0,225	0,095
0,6	0,392	0,429	0,413	0,377	0,321	0,248	0,159	0,055
0,8	0,267	0,311	0,304	0,278	0,236	0,179	0,109	0,026
1	0,168	0,219	0,217	0,2	0,169	0,126	0,07	0,005
1,2	0,09	0,146	0,15	0,14	0,18	0,085	0,042	0
1,4	0,029	0,089	0,097	0,093	0,078	0,053	0,02	0

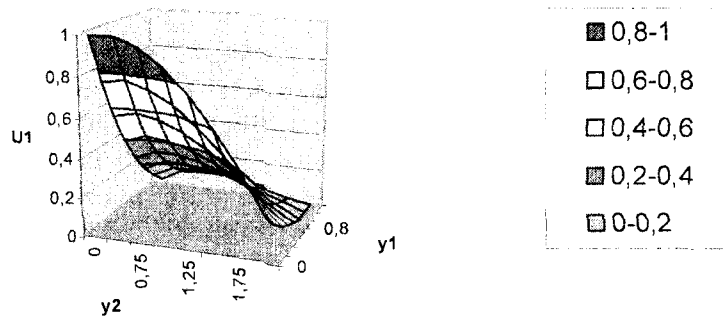


Рис. 2. График функции $u_1(\eta_1, \eta_2)$

Из таблицы 1 видно: грань клина, перпендикулярная перемещению, около вершины деформируется как единое целое (точки (0; 0) и (0; 0,5)), далее деформации затухают. Вторая грань деформируется по убывающей экспоненте.

Список литературы

1. Илюшин А.А. Основные направления развития проблемы прочности и пластичности // В кн. Прочность и пластичность. – М.:Наука,1971. – С. 5-18.
2. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – Изд. 14-е. – М., Наука, 1965. – 856 с.
3. Шоркин В.С. Напряженно-деформированное состояние в окрестности концентратора напряжений // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – В. 54. – 1996. – С. 222-227.

УДК 621.825-57

Корнеев Ю.С., канд. техн. наук, доцент кафедры «Теоретическая и прикладная механика»
Корнеева Е.Н., старший преподаватель кафедры «Высшая математика»
Корнеева Т.Ю., студент
(Орловский государственный технический университет)
г. Орел, тел. (4862) 419896

АНАЛИЗ РАБОТЫ ПУСКОВЫХ УСТРОЙСТВ ПРИВодОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН

Для современных машин характерны большие мощности, высокие скорости рабочих процессов, значительные динамические силы, возникающие в процессе их работы. Задача повышения надежности приводов с большими динамическими нагрузками, прежде всего, должна решаться путем снижения самих динамических нагрузок.

подавляющее большинство технологических машин приводится в движение от асинхронных электродвигателей с короткозамкнутым ротором. Это объясняется присущей этим двигателям высокой надежностью в эксплуатации и сравнительной простотой устройства и управления [9, 30]. Однако короткозамкнутые асинхронные электродвигатели [16, 27] в период пуска потребляют ток в 4-7 раз больше номинального, что требует для электрических сетей известного запаса мощности, и, кроме того, они имеют неустойчивую ветвь механической характеристики, обуславливающей сравнительно малый пусковой элемент. Если время разгона электродвигателей продолжается свыше десяти секунд, то они быстро выходят из строя [16]. Даже при незначительном увеличении скольжения в роторе значительно увеличивается реактивная мощность, и это приводит к большим потерям энергии. Пуск короткозамкнутого асинхронного электродвигателя может сопровождаться значительным падением напряжением в сети, что приводит к изменению пускового и максимального моментов двигателя. В силу этого, при наличии асинхронного короткозамкнутого электродвигателя обычной конструкции, при падении напряжения в питающей сети на 15-20% пуск рабочей машины становится практически невозможным [27].

Указанные выше недостатки особенно проявляются при разгоне рабочей машины, имеющей большие инерционные массы или работающей при резкопеременных нагрузках. Если при этом вал электродвигателя соединен с валом рабочей машины с помощью глухой муфты, то электродвигатель разгоняется значительное время под нагрузкой и перегревается в результате длительного протекания максимального пускового тока. Это обстоятельство обуславливает установку двигателей повышенной мощности, что, в конечном счете, приводит к повышенному расходу электроэнергии.

С целью устранения указанных недостатков используют асинхронные электродвигатели с контактными кольцами на роторе, позволяющими включать в его цепь активное или индуктивное регулирующее сопротивление [11], и двигатели постоянного тока, применение которых позволяет осуществлять пуск электродвигателя под нагрузкой, регулировать скорость, получить высокий коэффициент полезного действия.

Однако схемы управления этих двигателей довольно громоздки, содержат пусковые реостаты, большое число контактных устройств и реле, требуют большой площади для их размещения и ручного управления пуском (при автоматическом управлении система получается сложной и дорогой), имеют относительно высокую стоимость и сложность в эксплуатации, и поэтому применяются только в мощных приводах.

Этим объясняется повышенный интерес к асинхронным короткозамкнутым электродвигателям обычной конструкции. При этом целесообразно применять муфты, которые дают возможность не нагружать электродвигатель до достижения определенного числа оборотов, предохранять приводные механизмы от больших инерционных нагрузок при разгоне и резком торможении.

Основное назначение муфт – передача вращения и момента с одного вала на другой. Наряду с кинематической и силовой связью отдельных частей машины муфты обеспечивают и выполнение ряда других ответственных функций [23, 24].

Надежность работы и высокая производительность ряда машин в существенной мере зависит

от правильного выбора типа соединительных муфт. Проведенное обследование приводов некоторых видов технологических машин показало, что в настоящее время в них применяются разнообразные муфты, начиная с простейших глухих муфт и заканчивая муфтами сложных конструкций (фрикционными, центробежными, гидромуфтами).

В приводах машин широко применяются глухие муфты, а также упругие втулочно-пальцевые, главным образом по причине их относительной простоты и дешевизны изготовления.

Однако эти муфты не могут обеспечить приемлемые условия эксплуатации приводов этих машин. Высокие динамические нагрузки, возникающие при пуске, вызывают удары, резкие рывки, колебания, и, как следствие, брак продукции и выход из строя элементов привода.

В зарубежной и отечественной литературе [1, 19, 20, 32] указывается на применение для пуска машин муфт с металлической дробью или металлическим порошком в качестве рабочего тела. Однако исследования [26] выявили нестабильность характеристик дробемуфт, также недостаточное снижение динамических нагрузок ведомой системы. Эти муфты являются лишь эффективным предохранительным устройством и не могут быть использованы в качестве средств улучшения работы машин с частыми пусками.

Эффективным способом передачи момента является установка в привод агрегата гидродинамических муфт [31]. Благодаря гидромуфте можно, например, с помощью асинхронного короткозамкнутого электродвигателя небольшой мощности, разогнать тяжелую центрифугу, экстрактор или другой инерционный агрегат.

Все конструкции существующих гидромуфт позволяют осуществить плавный разгон агрегата и уменьшить длительность разгона электродвигателя под нагрузкой. Однако механические характеристики этих муфт весьма сильно зависят от степени наполнения гидромуфты маслом и стабильности его свойств. Недостатком распространенных в настоящее время гидромуфт являются потери энергии в них за счет проскальзывания [16], причем эти потери достигают 8-10%. Исследованиями М.А. Котова [18] и Н. Е. Биличенко [10] установлено, что, несмотря на увеличение продолжительности пускового периода гидромуфты недостаточно эффективно снижают динамические перегрузки в рабочей машине. При большом моменте инерции и недостаточном отводе тепла [31] жидкость внутри гидромуфты может закипеть, что приведет к недопустимому повышению давления в рабочей полости, возрастанию осевых сил, повреждению уплотнений и выбрасыванию горячей жидкости наружу. Поэтому необходимо устройство внешней системы охлаждения (обдув вентиляторами), а также тепловая защита.

Практическое использование гидромуфт показывает [29], что они сложны в изготовлении, требуют тщательного монтажа, балансировки и ухода, точности сборки, в противном случае уплотнения быстро выходят из строя, возникают значительные утечки масла. Кроме того, происходит старение масла в процессе эксплуатации муфт. Это вызывает нарушение характеристик гидромуфт и их неудовлетворительную работу. Следует отметить также, что в процессе эксплуатации гидромуфт имеет место довольно значительный расход масла на их рабочую заправку. Это объясняется тем, что при работе муфты под нагрузкой в продолжении двадцати и более часов в сутки масло в значительной степени теряет свои вязкостные свойства. Большое количество масла теряется при срабатывании тепловой защиты.

Для облегчения условий разгона машин двигателями с малыми пусковыми моментами (асинхронными короткозамкнутыми электродвигателями) и получения плавной характеристики пускового режима широко применяются центробежные пусковые предохранительные муфты [15, 22, 28, 33, 34]. Конструктивно центробежные муфты представляют собой сцепные фрикционные муфты осевого или радиального действия (дисковые, колодочные и др.). Как и все сцепные муфты, они могут быть нормально-разомкнутыми или нормально-замкнутыми. В нормально-разомкнутых схемах рабочие элементы разжаты усилием пружин и замыкаются за счет центробежных сил, действующих на грузики, колодки и т.п., а в нормально-замкнутых – наоборот. При наличии нормально-разомкнутой муфты двигатель набирает обороты на холостом ходу и лишь после достижения определенной скорости постепенно (с проскальзыванием) нагружается внешней нагрузкой. Нормально-замкнутые центробежные муфты служат в качестве ограничителей скорости и предохранителей от разгона вращающихся масс.

Простота и высокая надежность конструкций обусловили их широкое применение. Основным недостатком таких муфт является неполное разъединение фрикционных поверхностей в период оста-

нова, что приводит к их износу и потерям энергии. С целью устранения указанного недостатка в конструкцию вводят пружину, противодействующую центробежным силам. В этом случае величина передаваемого момента определяется разностью центробежной силы и силы натяжения пружины. Некоторые конструкции центробежных муфт имеют большую массу ведущих колодок, в результате чего разгон электродвигателя происходит с возрастающей нагрузкой, а процесс пуска несколько замедляется, потребление электроэнергии увеличивается.

Поскольку одним из требований к средствам пуска многих машин является облегчение условий разгона приводного двигателя и плавное движение технологической машины, то в этой связи определенный интерес представляют фрикционные муфты [4...8, 13, 14, 15, 17, 23, 24, 25], которые осуществляют передачу крутящего момента от ведущего вала к ведомому при помощи сил трения, создаваемых на контактных поверхностях сцепляющихся частей муфты.

Эти муфты, оказывая существенное влияние на динамические качества агрегата, позволяют обеспечивать плавный разгон рабочей машины, особенно в случае больших инерционных масс, предохранять машину и электродвигатель от перегрузок при пуске, остановке или изменении режима работы агрегата, повышать тем самым долговечность и надежность привода в целом.

Из фрикционных муфт особый интерес представляют фрикционные муфты с гидравлическим управлением [3, 21]. Достоинством муфт с гидравлическими замедлителями является возможность осуществления регулируемой задержки включения муфты (настройка на срабатывание при требуемом числе оборотов) и плавности приложения крутящего момента, повышенная нагрузочная способность, возможность автоматической регулировки передачи крутящего момента, благодаря чему в ФРГ такие муфты нашли довольно широкое применение в общем машиностроении, в горном машиностроении, в литейном производстве т.п.

Недостатком этих муфт является сложность конструкции, заключающаяся в наличии большого числа подвижных деталей и герметичных соединений. Кроме того, регулировка плавности включения довольно сложна и осуществляется путем подбора жидкостей соответствующей вязкости.

Аналогичны по принципу работы фрикционные муфты с пневматическим управлением [12, 24]. Они нашли широкое применение во многих отраслях народного хозяйства. Это объясняется следующими их преимуществами по сравнению с другими видами управления, в частности – с гидравлическим: простота конструкции, обеспечивающая высокую надежность и долговечность системы; регулировка величины передаваемого крутящего момента путем изменения давления воздуха в баллоне; местное и дистанционное плавное включение и выключение; компенсация значительных смещений валов. Износ фрикционных поверхностей в этих муфтах компенсируется автоматически, без какой-либо отдельной регулировки – за счет увеличения хода одной из трущихся поверхностей по мере изнашивания. Кроме того, некоторые виды этих муфт (шинно-пневматические) обладают высокими упругими и демпфирующими свойствами.

Однако применение фрикционных муфт с пневматическим управлением связано с известными трудностями, к которым относятся: потребность в сжатом воздухе, сложность подвода его к рабочим органам муфты и обеспечения герметичности трубопровода, необходимость иметь специальное устройство в виде поршней и цилиндров; довольно узкий температурный интервал, при котором сохраняется их работоспособность: они применимы при температуре окружающей среды от -20°C до $+60^{\circ}\text{C}$; постепенное уменьшение рабочего зазора между трущимися поверхностями, обусловленное остаточными деформациями резино-кордного баллона; старение резины, приводящее к изменению упругих свойств баллона.

Улучшение условий эксплуатации технологических машин и возможности предохранения их от поломок, а продукции – от брака может быть достигнуто установкой в привод машин механических пусковых муфт [2]. Предполагается, что механические пусковые муфты могут обеспечить:

1. Возможность полного разъединения ведомой и ведущей частей в период разгона электродвигателя, а также плавное последующее присоединение ведомой части и, следовательно, плавный пуск рабочей машины, позволяющий избежать больших динамических (инерционных) нагрузок, снижение ускорений в системе.
2. Возможность регулирования времени разгона ведомых частей, а также передаваемого муфтой крутящего момента. Последнее обстоятельство позволяет использовать муфту в качестве предохранительного звена в приводе машины.
3. Автоматическое включение ведомого вала при достижении ведущим валом определенной

частоты вращения.

4. Регулирование величины фрикционного момента муфты в пусковой период.

5. Безнагрузочный разгон электродвигателя до скорости, равной или близкой номинальному значению, что облегчает пуск двигателя, позволяет сократить длительность потребления пускового тока, превышающего номинальный в 2-3 раза (что особенно важно при частых пусках и остановках) и тем самым предохраняет электродвигатель от перегрева и снижает расход электроэнергии.

6. Требуемый закон движения рабочего органа технологической машины путем правильного выбора профиля рабочей поверхности регулирующего диска, жесткости и предварительного поджатия нажимной пружины, числа и массы шаров.

Эти качества механических пусковых муфт свидетельствуют о том, что они могут стать перспективными элементами в приводах технологических машин малой и средней мощности, где требуются ограничения при пуске.

Список литературы

1. Авторское свидетельство 348789 (СССР). Центробежная фрикционная муфта с дробью / Авт.изобрет. Б.Г. Балакирский, В.П. Волков, В.П. Галонский, А.П. Скурлягин и др. – Заявл.20.08.70, №1468849/25-27, опубл. 23.08.72.
2. Авторское свидетельство 418645 (СССР). Центробежная пусковая муфта / Авт.изобрет. Б.Г. Кобцев, В.Н. Коськин. – Заявл. 31.01.72, №1741625/25-27, опубл. 05.03.74.
3. Авторское свидетельство 647482 (СССР). Автоматическая фрикционная муфта / Авт.изобрет. Б.М. Гевко, О.И. Дубик. – Заявл. 16.03.76, №2335406/25-27, опубл. 15.02.79.
4. Авторское свидетельство 720230 (СССР). Фрикционная центробежная муфта / Челябинский политех. институт им. Ленинского комсомола; Авт. изобрет. В.А. Дубровин, А.В. Хашковский. – Заявл. 01.03.78, №2587109/25-27, опубл. 05.03.80.
5. Авторское свидетельство 996766 (СССР). Муфта включения / Орловский филиал ВЗМИ; Авт. изобрет. Б.Г. Кобцев, В.Н. Коськин, Ю.С. Корнеев. – Заявл. 26.05.81, №3307129/25-27, опубл. 15.02.83.
6. Авторское свидетельство 1017843А (СССР). Предохранительная дисковая муфта / Орловский филиал ВЗМИ; Авт. изобрет. Б.Г. Кобцев, В.Н. Коськин, Ю.С. Корнеев. – Заявл. 01.07.81, опубл. 15.05.83.
7. Авторское свидетельство 1065635А (СССР). Дисковая предохранительная муфта / Орловский филиал ВЗМИ; Авт. изобрет. Б.Г. Кобцев, В.Н. Коськин, Ю.С. Корнеев. – Заявл. 07.07.82, №3492607/25-27, опубл. 07.01.84.
8. Авторское свидетельство 1089319А (СССР). Дисковая муфта/Орловский филиал ВЗМИ; Авт. изобрет. Б.Г. Кобцев, В.Н. Коськин, Ю.С. Корнеев. – Заявл. 15.04.82, №3449946/25-27, опубл. 30.04.84.
9. Андреев В.П., Сабинин Ю.А. Основы электропривода. М. – Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 772 с.
10. Биличенко Н.Я., Высочин Е.М., Завгородний Е.Х. Эксплуатационные режимы ленточных конвейеров. – Киев, 1964.
11. Богопольский Б.Х., Пиковский С.А., Фельдман Е.С. Пусковые устройства мощных ленточных конвейеров. – Горные машины и автоматика, 1965. – № 7.
12. Борисов С.М. Пневмокамерные фрикционные муфты. М.: Машиностроение, 1971. – 184 с.
13. Борисов С.М. Фрикционные муфты и тормоза строительных и дорожных машин. М.: Машиностроение, 1973. – 168 с.
14. Вильнер С.С. Теоретические и экспериментальные исследования процесса включения фрикционных муфт. – Труды семинара по теории машин и механизмов: АН СССР, 1950. – Т.9. – Вып. 34.
15. Дьяченко С.К., Киркач Н.Ф. Предохранительные муфты. Киев: Гостехиздат, 1962. – 124 с.
16. Иванов Е.А. Муфты приводов. М.: Машгиз, 1959. – 412 с.
17. Кирдяшев Ю.Н. Экспериментально-теоретическое исследование процесса включения и коэффициентов трения дисковых муфт сцепления при повышенных скоростях скольжения: Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. техн. наук. – Л.: ЛПИ, 1953. – 16 с.
18. Котов М.А. К вопросу о приводе мощных ленточных конвейеров. – Горные машины и автоматика, 1958. – № 4.
19. Марголин И.И. К расчету порошковых и дробевых муфт для шахтных конвейеров. М.: Известия ВУЗов // Горный журнал, 1960. – № 10.
20. Моница М.Л. Центробежные порошковые и дробевые муфты в горной промышленности // Вопросы рудничного транспорта, 1957. – Вып. 2.
21. Мосин О.И. Исследование и установление основных параметров пусковых фрикционных муфт с гидравлическим замедляющим устройством для привода шахтных конвейеров: Автореферат дис. на соискание ученой степени канд. техн. наук. – Караганда, 1968.

22. Патент 3948372 (США). Центробежная муфта, 1974.
23. Поляков В.С., Барбаш И.Д. Муфты. Конструкции и расчет. – Л.: Машиностроение, 1973. – 4-е изд., исправ. и доп. – 336 с.
24. Поляков В.С., Барбаш И.Д., Ряховский О.А. Справочник по муфтам. 2-е изд., исправ. и доп. под ред. проф. В.С. Полякова. – Л.: Машиностроение, 1979. – 344 с.
25. Редькина Э.М. Исследование процесса включения однодисковых муфт: Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. техн. наук. – Л.: ЛПИ, 1974. – 16 с.
26. Смирнов В.К. Исследование различных режимов работы предохранительных дробемуфт // Известия ДГИ, 1965. – Вып. 22.
27. Сыромятников И.А. Режимы работы асинхронных и синхронных электродвигателей. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 528 с.
28. Татур О.Н. Конструкции управляемых муфт за рубежом. М.: 1963. – 132 с.
29. Фетисов И.И., Лувищук И.А. Результаты промышленных испытаний мощных ленточных конвейеров КРУ-350 и КРУ-260 // Труды КНИУИ, 1965. – Вып. 17.
30. Чиликин М.Г. Основы электропривода. М.: Госэнергоиздат, 1953.
31. Яременко О.В. Ограничивающие гидродинамические муфты. – М.: Машиностроение, 1970. – 224 с.
32. Altman F.G. Antriebselemente und mechanische Getriebe. – VDI. – В. 95. – 1953. – п. 19.
33. Schleudinger K. Die Anlaufkupplungen als Mittel zur Automatisierung des Arbeitszyklus und zur Erhöhung der Betriebswirtschaftlichkeit bei Elektromotoren. – Technische Rundschau, 1961. – п. 45.
34. Werner R. Die verzögerte Kupplung-Losung für viele Antriebsprobleme. Maschinenwelt und Elektrotechnik, 1959.

УДК 539

*Моисеенко А.А., канд. техн. наук, доцент кафедры «Высшая математика»
(Орловский государственный университет)
г.Орел, тел. (4862) 419848; e-mail: kvm@ostu.ru*

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ КОНСТРУКЦИОННОЙ ПРОЧНОСТИ СОЕДИНЕНИЯ ПО МАКРОПРЕРЫВИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ГАРАНТИРОВАННЫМ НАТЯГОМ

In the article the comparison of theoretical solution of stressed-deformed condition with guaranteed interference fit on discontinuous cylindrical surface with the test problems are submitted. The calculations have shown good coincidence between them.

В современном машиностроении в конструкциях машин и механизмов соединения с гарантированным натягом широко распространены в качестве неподвижных соединений. В [1] было показано, что посадка по прерывистой поверхности (по выступам зубьев ступицы, например) дает в ряде случаев компоновочные и конструктивные преимущества. Там же была представлена математическая модель такого соединения. Расчетная схема его показана на рисунке 1. Для определения НДС соединения была составлена программа «PRESS», результаты расчетов представлены в частности в [2].

Для оценки точности решения были рассмотрены задачи-эталон, составляющие предмет данной статьи

1 Соединение цилиндрического вала со ступицей (задача Ляме)

Классической задачей – эталоном для рассматриваемого соединения является задача Ляме – соединение с гарантированным натягом гладкого полого цилиндрического вала со ступицей.

На рисунке 1 изображено соединение со сплошным (непрерывным) контактом

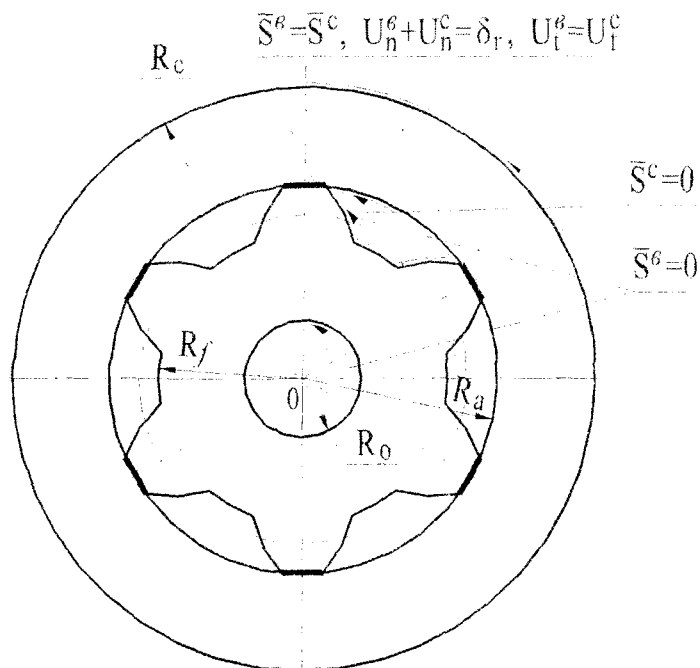


Рис. 1. Соединение с гарантированным натягом полого зубчатого вала со ступицей

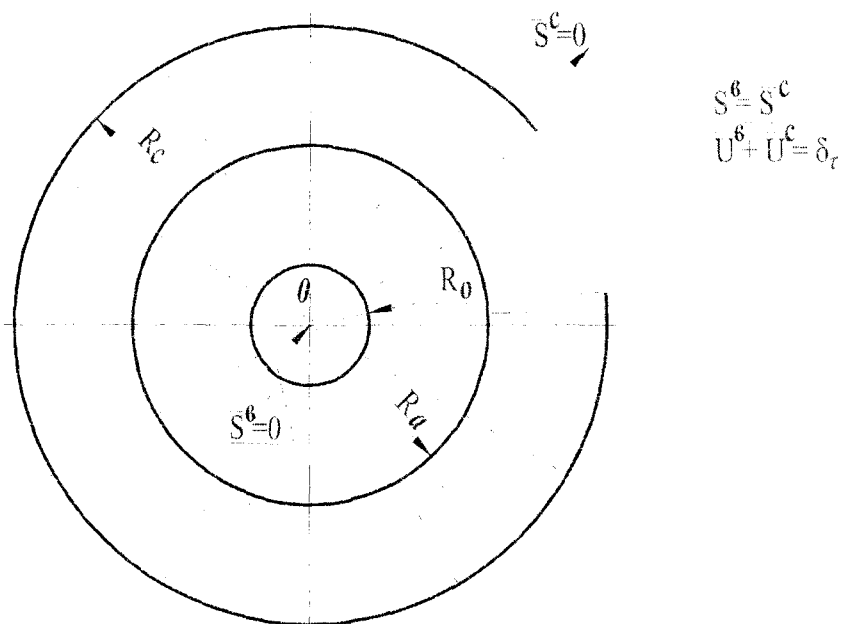


Рис. 2. К решению задачи Ляме о соединении цилиндрического вала со ступицей

Применим для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) этого соединения тот же самый подход, что и для определения НДС соединения с прерывистым контактом. Граничные условия для вала и ступицы следующие: на контуре вала и ступицы вне контакта (внешняя граница ступицы и внутренняя граница вала) напряжения равны нулю, а в контакте (внутренняя граница ступицы и внешняя граница вала) напряжения равны, а сумма нормальных перемещений равна радиальному натягу δ_r . Таким образом, условия на границах примут вид:

вне контакта

$$\bar{S}_j^b = 0, \tag{1}$$

$$\bar{S}_\eta^c = 0; \quad (2)$$

в контакте

$$\bar{S}_j^e - \bar{S}_j^c = 0, \quad (3)$$

$$U_{jn}^e + U_{\eta n}^c = -\delta_r. \quad (4)$$

Нетрудно заметить, что уравнения (1)-(4) на границе дублируют уравнения в теоретическом решении [1] для прерывистого контакта. Обозначения для напряжений и перемещений полностью совпадают с обозначениями, введенными в [1].

Применяя МГЭ и решая систему уравнений (1)-(4), получим НДС рассматриваемого гладкого соединения и коэффициент прочности C_0 для него. Для определения НДС и коэффициента C_0 была составлена программа «LAME» на языке FOXPRO.

Получены следующие результаты расчета: по программе «LAME» для общего числа конечных элементов $n_\Sigma = 600$, $\frac{\delta_r}{R_a} = 0,0005$, $E = 2,15 \cdot 10^5$ МПа, $R_0 = 0$, $\frac{R_c}{R_a} = 10$, $P_n^0 = 53,1861$ МПа.

По теоретической формуле $P_n^{от} = 53,2125$ МПа. Относительная погрешность δ^0

$$\delta^0 = \left| \frac{P_n^0 - P_n^{от}}{P_n^{от}} \right| \quad (5)$$

составила в данном случае $\delta^0 = 0,000486$, что позволяет судить о высокой точности метода.

2 Задача о равновесии части соединения

На рисунке 3 изображено соединение зубчатого вала со ступицей.

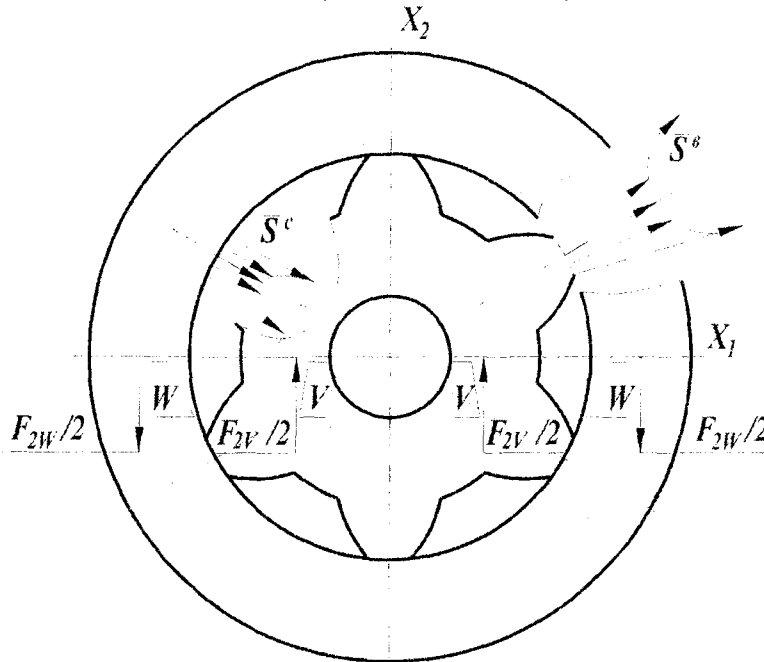


Рис. 3. К задаче о равновесии фрагментов вала и ступицы

Число зубьев вала выбирается по формуле

$$z = 2 \cdot (2n + 1), \quad (6)$$

где n – произвольное целое число.

При этом условии горизонтальная ось X_1 пересекает соединение по границам секторов, по впадинам зубьев. В сечениях вала V и ступицы W , очевидно, действуют напряжения σ_{22} сжатия и растяжения соответственно. При отбрасывании нижней половины соединения сечения V и W превращаются в граничные элементы верхних половин вала и ступицы, на которых действуют средние нормальные напряжения S_{2V} и S_{2W} и их равнодействующие F_{2V} и F_{2W}

$$F_{2V} = 2 \cdot S_{2V} \cdot \Delta l_V, \quad (7)$$

$$F_{2W} = 2 \cdot S_{2W} \cdot \Delta l_W, \quad (8)$$

где S_{2V} и S_{2W} определяются по формулам, приведенным в [1];

Δl_V – толщина стенки полого вала;

Δl_W – толщина стенки ступицы.

$$S_{2V} = s_{2V\tau i} \cdot F_{\tau i}, \quad (9)$$

$$S_{2W} = s_{2W\tau i} \cdot F_{\tau i}, \quad (10)$$

где $s_{2V\tau i}$ и $s_{2W\tau i}$ – напряжения направления 2 на элементах v и w от действия единичных сил

e_τ по всем элементам i : $1 \leq i \leq J_2$ – для вала и $J_2 + 1 \leq i \leq J_4$ – для ступицы;

$F_{\tau i}$ – равнодействующие фиктивные силы направления τ в узлах i .

Верхняя половина вала находится в равновесии под действием напряжений на контактных поверхностях зубьев (и их равнодействующих) и силы F_{2V} . Аналогично для ступицы – под действием напряжений на контактных поверхностях (и их равнодействующих) и силы F_{2W} . Невязки δ_V и δ_W можно определить по формулам

$$\delta_V = F_{2V} - 2 \cdot R_a \cdot C_0 \cdot P_n^0, \quad (11)$$

$$\delta_W = F_{2W} - 2 \cdot R_a \cdot C_0 \cdot P_n^0, \quad (12)$$

где C_0 – коэффициент прочности, определяемый по формуле 1 в [2].

P_n^0 – контактное давление при полном контакте, определяемое по Ляме.

Относительные невязки δ_V^0 и δ_W^0 можно определить как

$$\delta_V^0 = \left| \frac{\delta_V}{F_{2V}} \right|, \quad (13)$$

$$\delta_W^0 = \left| \frac{\delta_W}{F_{2W}} \right|. \quad (14)$$

Единый же блок из верхних половин вал-шестерни и ступицы находится в равновесии под действием в сечениях V и W сил F_{2V} и F_{2W} . В этом случае суммарная невязка δ_Σ равна

$$\delta_\Sigma = F_{2V} - F_{2W}, \quad (15)$$

а относительная δ_Σ^0

$$\delta_\Sigma^0 = \left| \frac{\delta_\Sigma}{F_{2W}} \right|. \quad (16)$$

Для определения F_{2V} , F_{2W} , δ_V , δ_W , δ_V^0 , δ_W^0 была составлена программа «KONTROL» на языке FOXPRO. Результаты расчета следующие: для зуба колеса с эвольвентным зацеплением (ГОСТ-13755-81) $z=18$, $R_0=0$, $R_c=16$, получено $\delta_V^0 = 0,0010$, $\delta_W^0 = 0,0012$, $\delta_\Sigma^0 = 0,00018$, что тоже

позволяет судить о высокой точности расчета.

Список литературы

1. Моисеенко А.А. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния тел, контактирующих по прерывистой цилиндрической поверхности, вызываемого термической посадкой / Сб. Известия Орел ГТУ. Серия «Естественные науки». – 2003. – №3-4. – С. 60-63.
2. Моисеенко А.А. Исследование конструкционной прочности соединения цилиндрического вала с ступицей по прерывистой поверхности / Сб. Известия Орел ГТУ. Серия «Естественные науки». – 2005. – №7-8 – С. 136-144.

Немировский Ю.В., докт. физ.-мат. наук, профессор
 (Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича), СО РАН
 г.Новосибирск, e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

ОСОБЕННОСТИ ВЫПУЧИВАНИЯ СЛОИСТЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ СЖИМАЮЩИХ НАГРУЗКАХ

Пластины и стержни составляют основу многих ответственных конструкций машино-, авиасудостроения и объектов строительной индустрии. Во многих случаях основной тип нагружения сводится к сжимающим нагрузкам вдоль оси стержня или в плоскости пластины. При этом несущая способность конструкций исчерпывается вследствие потери устойчивости (выпучивания) при сравнительно малых уровнях деформаций, далеких от предельных значений для используемых материалов. Для повышения амплитуд критических нагрузок приходится наращивать поперечные сечения конструкций, что приводит к неприемлемому повышению веса и стоимости конструкции. В последние десятилетия создание эффективных конструкций связывают с использованием композитных многослойных материалов. Подробный обзор и анализ проблем и методов расчета слоистых конструкций изложен, например, в монографиях [1-3].

Отметим здесь, что оценка эффективности использования слоистых конструкций при воздействии сжимающих нагрузок не получила пока должного освещения. В данной работе сделана попытка восполнить этот пробел. Из-за ограниченности объема статьи будем рассматривать для простоты стержни прямоугольного сечения с симметричными относительно центральных осей Oz и Oy расположением материалов и будем считать, что напряжения $\bar{\sigma}_i$ в i -ом слое определяются равенством

$$\sigma_i = a_i + c_i \left(\frac{du}{dx} - \mu^2 z \frac{d^2 w}{dx^2} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{28}$$

где

$$\sigma_i = \frac{\bar{\sigma}_i}{\bar{E}_0}, \quad u = \frac{\bar{u}}{\bar{l}}, \quad w = \frac{\bar{w}}{\bar{H}_0}, \quad x = \frac{\bar{x}}{\bar{l}}, \quad \mu = \frac{\bar{H}_0}{\bar{l}},$$

\bar{u} , \bar{w} – осевое смещение и прогиб стержня, \bar{E}_0 , $2\bar{H}_0$, \bar{l} – модуль упругости, толщина и длина эталонного стержня квадратного сечения. Коэффициенты a_i , c_i определяют деформированное состояние i -го слоя. В случае упругого состояния имеем

$$a_i = 0, \quad c_i = E_i, \quad E_i = \bar{E}_i / \bar{E}_0. \tag{29}$$

При пластическом деформировании в случае кусочно-линейной диаграммы

$$a_i = \sigma_{0i} \left(1 - E_i^* / E_i \right), \quad c_i = E_i^*, \tag{30}$$

где $\sigma_{0i} = \bar{\sigma}_{0i} / \bar{E}_0$, $\sigma_{pi} = \bar{\sigma}_{pi} / \bar{E}_0$, $E_i^* = \bar{E}_i^* / \bar{E}_0 = (\sigma_{pi} - \sigma_{0i}) / (\varepsilon_{pi} - \varepsilon_{0i})$, $\bar{\sigma}_{0i}$, $\bar{\sigma}_{pi}$ – пределы теку-

чести и прочности материала i -го слоя, ε_{0j} , ε_{pi} – предельные упругая и разрушающая деформации. При вышеописанных предположениях усилия и изгибающие моменты, возникающие в слоистом прямоугольном стержне определяются равенствами

$$N = \frac{\bar{N}}{4\bar{E}_0 H_0^2} = b \left[\sum_{i=1}^n a_i (h_i - h_{i-1}) + \frac{du}{dx} \sum_{i=1}^n c_i (h_i - h_{i-1}) \right], \quad (31)$$

$$M_1 = -J_1 \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad M_2 = -J_2 \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad M_k = \frac{3}{4} \frac{\bar{M}_k}{E_0 H_0^4}, \quad k=1, 2,$$

$$J_1 = b\mu^2 \sum_{i=1}^n c_i (h_i^3 - h_{i-1}^3), \quad J_2 = b^3 \mu^2 \sum_{i=1}^n c_i (h_i - h_{i-1}), \quad (32)$$

где b – безразмерная ширина сечения. Уравнения изгиба при выпучивании стержня в двух перпендикулярных плоскостях будут иметь вид:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{3N}{J_1} w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{3N}{J_2} w = 0, \quad (33)$$

откуда в случае шарнирного опирания краев будем иметь значения безразмерных критических нагрузок выпучивания в соответствующей плоскости [4]

$$N_1^* = \frac{\pi^2 J_1}{3}, \quad N_2^* = \frac{\pi^2 J_2}{3}. \quad (34)$$

Следует иметь в виду, что формулы (7) определяют критические нагрузки, как в случае упругого деформирования, так и в случае пластического деформирования материала отдельных или всех слоев. Отличие состоит в выборе при подсчете величин J_1 , J_2 , входящих в них коэффициентов a_i , c_i по формулам (2) или (3). Дело в том, что в слоистых конструкциях с жестко соединенными слоями, переход отдельного слоя в пластическое состояние не приводит к активизации процессов деформирования за счет сдерживающего эффекта сопряженных слоев, т.е. процесс выпучивания упругопластической системы происходит как бы в условиях «искусственного сдерживания», а для таких систем достаточно надежные результаты при определении критических нагрузок получаются при использовании концепции продолжающегося нагружения Шенли [5]. Здесь для получения удобных и единообразных формул эта концепция распространена на случай слоистых стержней при переходе отдельных или всех материалов за соответствующие пределы упругости. Для эталонного стержня критическая нагрузка определяется выражением

$$N_0^* = \frac{\pi^2 E_0^* \mu^2}{3}, \quad (35)$$

где $E_0^* = 1$ при упругом деформировании и $E_0^* = (\sigma_p^0 - \sigma_0^0) / (\varepsilon_p^0 - \varepsilon_0^0)$ при выпучивании за пределом упругости. Упругое выпучивание эталонного стержня реализуется при $N_0^* \leq \sigma_0^0$, т.е. если

$$\mu^2 \leq \frac{3\sigma_0^0}{\pi^2}, \quad (36)$$

а пластическое выпучивание при выполнении условия

$$\frac{3\sigma_0^0}{\pi^2 E_0^*} \leq \mu^2 \leq \frac{3\sigma_p^0}{\pi^2 E_0^*}. \quad (37)$$

Учитывая выражения (2), (4), (5), (8) и предполагая, что

$$\sigma_{0m}/E_m = \min_{i=1, 2, \dots, n} (\sigma_{0i}/E_i),$$

получим неравенства, определяющие упругое выпучивание слоистых стержней

$$\mu^2 \leq \frac{3\sigma_{0m} \sum_{i=1}^n E_i (h_i - h_{i-1})}{\pi^2 E_m \sum_{i=1}^n E_i (h_i^3 - h_{i-1}^3)}, \quad (38)$$

$$\mu^2 \leq \frac{3\sigma_{0m}}{\pi^2 E_m b^2}. \quad (39)$$

При нарушении этих неравенств критические нагрузки упругопластически деформируемых стержней будем определять по формулам (8), в которых при подсчете величин J_1, J_2 по формулам (5) будем принимать $c_i = E_i$ при $i \neq m$ и $c_m = E_m$, а при оценке предельной деформации du/dx для соответствующей критической нагрузки N_1^* или N_2^* в выражении (4) будем подсчитывать коэффициенты a_i, c_i по формулам (2) при $i \neq m$ и по формулам (3) при $i = m$. Если ближайшая к ε_{0m} предельная упругая деформация ε_{0k} будет у материала k -го слоя, то аналогичный расчет повторяется при использовании коэффициентов a_i, c_i по формулам (2) при $i \neq m$ и по формулам (3) при $i = m, k$ и т.п. Полученные формулы позволяют сформулировать ряд критериев рациональных проектов для стержней, сжимаемых осевой силой. Например, требование $N_1^* = N_2^*$ определяет равноустойчивые проекты, требование $N_1^* = N_2^* = N_0^*$ – эквивалентные проекты. При этом в таких проектах для одного типа слоистости все материалы могут в момент выпучивания сохранять упругое состояние, а при другой часть из них будет находиться в пластическом состоянии. Во многих случаях важное значение имеет вес конструкции. Тогда эквивалентные по весу конструкции определяются равенством

$$b = \sum_{i=1}^n \rho_i (h_i - h_{i-1}) = 1, \rho_i = \bar{\rho}_i / \bar{\rho}_0, \quad (40)$$

$\bar{\rho}_i, \bar{\rho}_0$ – удельные веса материалов i -го слоя и эталонного стержня. В этом случае критериями качества конструкций выступают величины

$$Z_1 = \frac{N_1^*}{N_0^*} = \frac{J_1}{E_0^* \mu^2}, \quad Z_2 = \frac{N_2^*}{N_0^*} = \frac{J_2}{E_0^* \mu^2}. \quad (41)$$

При варьировании координат раздела слоев следует учитывать равенства (13), неравенства $h_{i+1} > h_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ и $h_0 = 0$. Аналогичное решение легко получить, повторив для слоистой конструкции выкладки, приведенные в [4] для шарнирно опертой кольцевой арки с углом раствора 2α , нагруженной гидростатическим давлением \bar{q} . В результате для критических давлений эталонного и слоистого стержней получим безразмерные значения критических давлений

$$q_0^* = E_0^* \mu^2 \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right), \quad q_1^* = \frac{J_1}{E_0^* \mu^2} q_0^*, \quad q_2^* = \frac{J_2}{E_0^* \mu^2} q_0^*, \quad \mu^2 = \frac{H_0^2}{R^2}. \quad (42)$$

При рассмотрении слоистых плит симметричной по толщине структуры относительно отсчетной поверхности будем считать, что каждый слой является ортотропным с осями ортотропии, совпадающими с координатными осями x и y . Тогда в рамках гипотезы Кирхгофа для всего пакета слоев уравнение изгиба плиты на упругом основании будет иметь вид [6]

$$D_{11} \frac{d^4 w}{dx^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + D_{22} \frac{d^4 w}{dy^4} - N_x \frac{d^2 w}{dx^2} - N_y \frac{d^2 w}{dy^2} + Kw = q(x, y),$$

где N_x, N_y – сжимающие нагрузки в плоскости пластины;

K – коэффициент упругой постели;

$q(x, y)$ – поперечная нагрузка;

$$D_{js} = \frac{E_0 H_0^3}{3} \sum_{i=1}^n a_{js}^{(i)} (h_i^3 - h_{i-1}^3), \quad j, s = 1, 2,$$

$$D_{66} = \frac{E_0 H_0^3}{3} \sum_{i=1}^n a_{66}^{(i)} (h_i^3 - h_{i-1}^3), \quad h_0 = 0,$$

$a_{js}^{(i)}, a_{66}^{(i)}$ – безразмерные коэффициенты ортотропии материала i -го слоя.

В случае шарнирного опирания краев и пропорциональности нагрузок $N_x = pN_y$, критическая нагрузка определяется выражением [6]

$$N_x^* = \frac{1}{\alpha_m^2 + p\beta_k^2} \left[D_{11}\alpha_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha_m^2\beta_k^2 + D_{22}\beta_k^4 + K \right],$$

$$\alpha_m = \frac{\pi m}{a}, \quad \beta_k = \frac{\pi k}{b}, \quad k, m = 1, 2, 3, \dots,$$

a, b – размеры сторон пластины. Для эталонной изотропной плиты критическая нагрузка определяется равенством

$$N_x^0 = \frac{D_0 (\alpha_m^2 + \beta_k^2)^2 + K}{\alpha_m^2 + p\beta_k^2}, \quad D_0 = \frac{E_0 H_0^3}{3(1-\nu_0^2)}.$$

При одинаковом весе пластин, т.е. при выполнении равенства $\sum_{i=1}^n \rho_i (h_i - h_{i-1}) = 1, h_0 = 0$ степень качества конструкции определяется отношением $N = \min_{m,k} N_x^* / \min_{m,k} N_x^0$.

Поскольку функция N содержит большое количество параметров геометрической и физической природы, то для достижения требуемых качеств конструкции можно формулировать целый ряд дополнительных требований (совпадение волнообразования слоистой и эталонной пластины, достижение предела упругости в момент выпучивания в некоторых слоях и др.) Однако обсуждение этих возможностей выходит за пределы данной статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума СО РАН (Постановление № 54 от 09.02.06, проект 2.2).

Список литературы

1. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластичны. Изгиб, устойчивость и колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 287 с.
2. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления. – Новосибирск: Наука, 2004. – 407 с.
3. Немировский Ю.В., Мищенко А.В., Вохмянин И.Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. – Новосибирск: Изд-во НГАСУ, 2004. – 488 с.
4. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1976. – 600 с.

5. Зубчанинов В.Г. Механика сплошных деформируемых сред. – Тверь: Изд-во ТГТУ, 2003. – 703 с.
 6. Кончковский З. Плиты. Статические расчеты. – М.: Стройиздат, 1984. – 481 с.

УДК 621.926

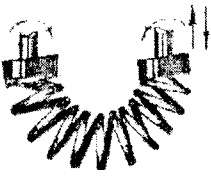
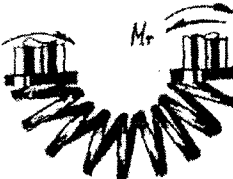

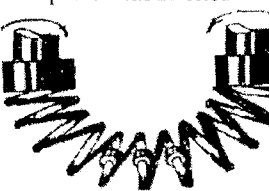
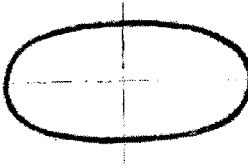
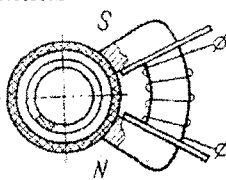
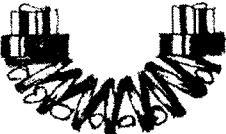
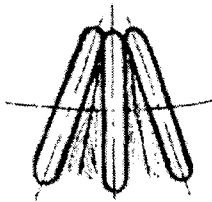
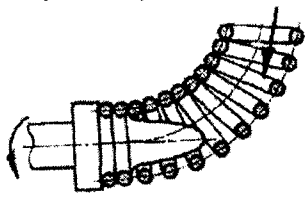
*Сиваченко Л.А., докт. техн. наук, профессор
 (ГУВПО Белорусско-Российский ун-т, г. Могилев), e-mail: sivachenko_k@mail.ru
 Хононов Д.М., канд. техн. наук
 (Технологический ун-т, г. Хайфа, Израиль)*

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАБОТЫ РАБОЧИХ ОРГАНОВ ПРУЖИННЫХ МЕЛЬНИЦ В УСЛОВИЯХ ИНТЕНСИВНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пружинные мельницы являются новым высокоэффективным видом технологического оборудования [1].

Дан анализ путей интенсификации работы пружинных мельниц. Рассмотрены несколько вариантов, в частности, установки на рабочих органах и других частях мельниц дополнительных элементов, оптимизацией движения материала в рабочих и транспортных зонах, повышения энергонапряженности мельниц и реализации эффекта интенсивных вибрационных колебаний их рабочих органов. Варианты интенсификации представлены в таблице 1.

Таблица 1. Способы генерирования виброколебаний витков

Виды нагружения	Виды колебаний		
	Продольные	Крутильные	Поперечные
Нагружение внешними силами	Основные перемещения одного из концов спирали 	Пульсационное подтормаживание одного из концов рабочего органа 	Эксцентричная установка узлов крепления 
Нагружение внутренними силами	Кулачки на боковых поверхностях витков 	Переменная форма профиля витков 	Нагружение магнитным полем 
Нагружение сопротивлением обрабатываемой среды	Наличие в обрабатываемом продукте крупных и прочных включений 	Вязкостное трение между витками 	Подача материала между спиралью и роликом 

Графическая интерпретация реализации концепции использования управляемых колебаний рабочих органов пружинных мельниц приведена на рисунке 1, где изображена амплитудно-частотная характеристика работы пружины. Здесь в координатах амплитуда A – частота ω колебаний показано, что в режиме резонанса амплитуда имеет максимальное значение. Очевидно, что для реальных условий целесообразно ограничить значения амплитуды до некоторого оптимального значения A_0 , а введенную в рабочий орган энергию передавать в перерабатываемую среду на совершение полезной работы.

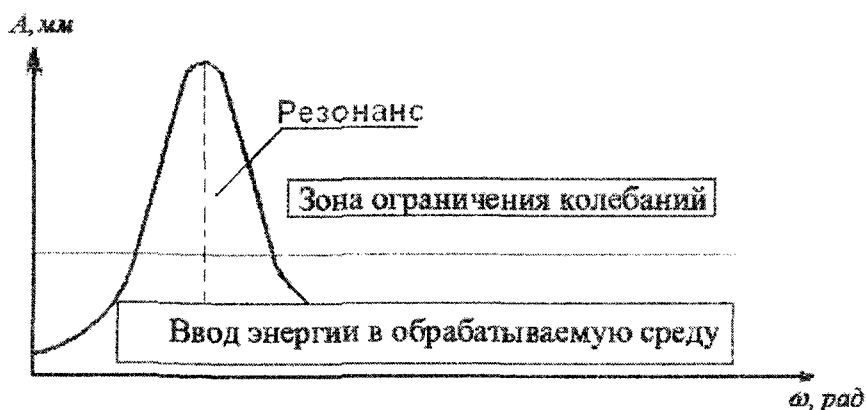


Рис. 1. Графическая интерпретация концепции управляемых колебаний рабочих органов пружинных мельниц

Поглощение этой энергии может производить как сам обрабатываемый материал, что можно регулировать его физико-механическими свойствами и реологией, так и конструктивные элементы в мельнице: корпус, отбойники, рабочие органы, ограничители колебаний и др.

Генерирование колебаний обеспечивается внешними и внутренними силами, а также сопротивлением обрабатываемой среды. Внешними силами можно обеспечить осевое перемещение одного из концов пружины или их взаимный поворот, что приводит к возбуждению продольных и крутильных колебаний.

Отмечено, что простой вывод рабочего органа в резонансный режим – это только часть общей задачи, решаемой в настоящей работе. Предложены дополнительные механизмы контактных взаимодействий между пружинами рабочих органов и элементами помольной камеры по принципу молота и наковальни. Описаны новые конструкции пружинных мельниц как на основе традиционных исполнений с вращающимися рабочими органами, так и в виде кассетного набора пружин, приводимых в соударение между собой виброинерционным приводом.

Исходной информацией для математического анализа являются геометрия пружины в недеформированном состоянии, которая адекватно описывается геометрией винтовой оси и формой поперечного сечения прутка, из которого навита пружина. При установке в рабочее положение (рисунки 2, 3) пружина изгибается, что вызывает необходимость определения ее предварительного напряженно-деформированного состояния.

Задача определения формы оси пружины при установке ее в исходное положение является геометрически нелинейной. Для ее анализа используются соотношения, предназначенные для описания больших перемещений стержня, предложенные в работах В.А. Светлицкого и С.С. Гаврюшина. Для описания движения используется подход Лагранжа, т.е. описание производится в терминах исходной конфигурации. Исходная информация задается в правосторонней глобальной системе координат X_i ($i=1, 2, 3$) с единичными ортами i_i (рисунки 4, 5).

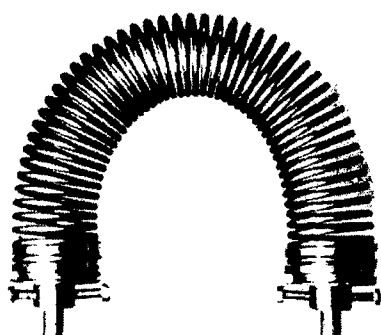


Рис. 2. Рабочий орган

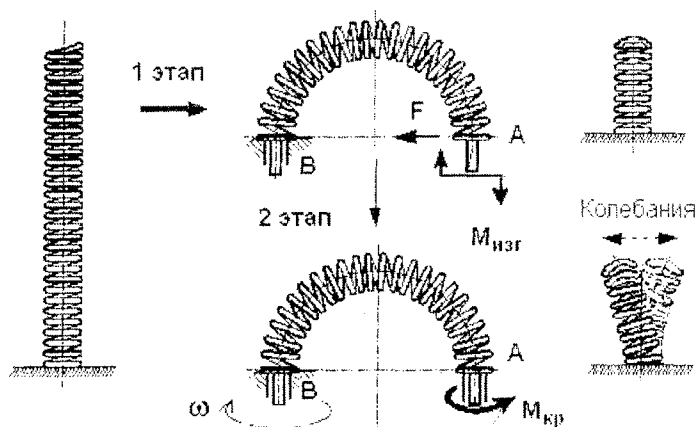


Рис. 3. Деформирование рабочего органа мельницы:
1 этап – установка,
2 этап – нагружение пружины крутящим моментом

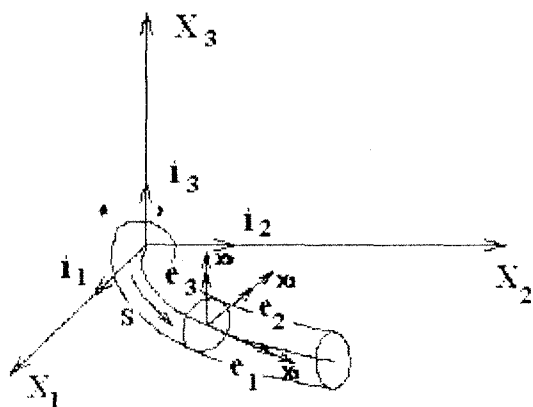


Рис. 4. Глобальная и локальная системы координат

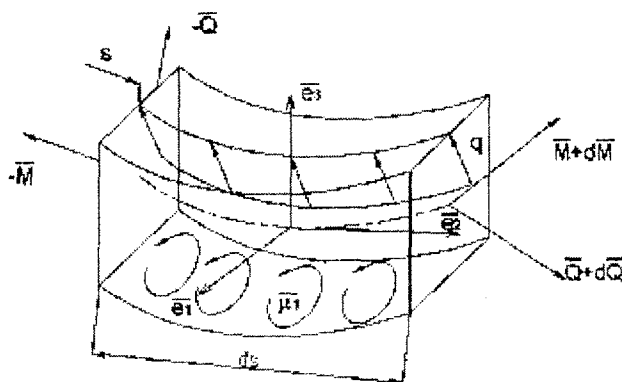


Рис. 5. Усилия и моменты, действующие на элемент стержня

Для описания актуального (деформированного) состояния стержня используется локальная система координат, связанная с текущим направлением касательной (орт e_1) и главными осями поперечного сечения (орты e_2 и e_3). Переход от глобальной системы координат к локальной можно описывается с помощью трех последовательных поворотов: ϑ_1 – поворот относительно положения оси i_1 ; ϑ_2 – поворот относительно нового положения оси i_2 ; ϑ_3 – поворот относительно нового положения оси i_3 . Соответствующая матрица перехода – $[l(s^0)]$ и матрица $[n(s^0)]$ – связывающая производные от углов поворота с кривизнами стержня в локальном базисе имеют вид

$$[l(s^0)] = \begin{bmatrix} C_2 C_3 & C_2 S_3 C_1 + S_2 S_1 & C_2 S_3 S_1 - S_2 C_1 \\ -S_3 & C_3 C_1 & C_3 S_1 \\ S_2 C_3 & S_2 S_3 C_1 - C_2 S_1 & S_2 S_3 S_1 + C_2 C_1 \end{bmatrix} \quad [n(s^0)] = \begin{bmatrix} 1 & -C_1 \cdot T_3 & S_1 \cdot T_3 \\ 0 & C_1 & -S_1 \\ 0 & C_3 & C_3 \\ 0 & S_1 & C_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Здесь $C_i = \cos(\nu_i)$; $S_i = \sin(\nu_i)$; $T_i = \operatorname{tg}(\nu_i)$, s^0 – лагранжева координата, отсчитываемая вдоль недеформированной оси стержня. В безразмерном виде основные соотношения имеют вид:

Вспомогательные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\omega^2}{b_0} \cdot (Q_1^* \cdot l_{11} + Q_2^* \cdot l_{21} + Q_3^* \cdot l_{31}), & K_2 &= \frac{1}{b_2} \cdot (M_1^* \cdot l_{12} + M_2^* \cdot l_{22} + M_3^* \cdot l_{32}), \\ K_1 &= \frac{1}{b_1} \cdot (M_1^* \cdot l_{11} + M_2^* \cdot l_{21} + M_3^* \cdot l_{31}), & K_3 &= \frac{1}{b_3} \cdot (M_1^* \cdot l_{13} + M_2^* \cdot l_{23} + M_3^* \cdot l_{33}) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ε – деформация вдоль оси стержня, K_i – безразмерные кривизны, b_0 – жесткость стержня на растяжение–сжатие, b_1 – жесткость стержня на кручение, b_2, b_3 – изгибные жесткости, $S = s^0/L$, $\omega = h/L$. При приведении к безразмерной форме использовались характерные размерные величины: L – длина стержня; h – характерный размер поперечного сечения; E – модуль упругости. Обезразмеренные силовые факторы помечены верхним индексом «*». При динамических расчетах в уравнениях учитывается вклад в нагрузку инерционных слагаемых:

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dS} &= (1 + \varepsilon) \cos(\alpha_2) \cos(\alpha_3) \\ \frac{dX_2}{dS} &= -(1 + \varepsilon) \sin(\alpha_2) \\ \frac{dX_3}{dS} &= (1 + \varepsilon) \sin(\alpha_2) \cos(\alpha_3) \\ \frac{d\alpha_1}{dS} &= (1 + \varepsilon) (K_1 - \cos(\alpha_1) \operatorname{tg}(\alpha_2) K_2 + \sin(\alpha_1) \operatorname{tg}(\alpha_3) K_3) \\ \frac{d\alpha_2}{dS} &= (1 + \varepsilon) \left(\frac{\cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_3)} K_2 - \frac{\sin(\alpha_1)}{\cos(\alpha_3)} K_3 \right) \\ \frac{d\alpha_3}{dS} &= (1 + \varepsilon) (\sin(\alpha_1) K_2 + \cos(\alpha_1) K_3) \\ \frac{dQ_1}{dS} &= -(1 + \varepsilon) q_1^* \\ \frac{dQ_2}{dS} &= -(1 + \varepsilon) q_2^* \\ \frac{dQ_3}{dS} &= -(1 + \varepsilon) q_3^* \\ \frac{dM_1}{dS} &= -(1 + \varepsilon) (l_{21} Q_2^* - l_{31} Q_3^* + m_1) \\ \frac{dM_2}{dS} &= -(1 + \varepsilon) (l_{11} Q_1^* - l_{11} Q_2^* + m_2) \\ \frac{dM_3}{dS} &= -(1 + \varepsilon) (l_{11} Q_1^* - l_{21} Q_2^* + m_3) \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (1-3), дополненные соответствующими граничными условиями используются в работе при расчете статических и динамических процессов деформирования рабочего органа.

Помимо системы (1-3) в расчетах применяется упрощенная расчетная схема эквивалентного бруса, использующая замену цилиндрической пружины стержнем, ось которого совпадает с осью пружины, наделенный жесткостными характеристиками, соответствующими характеристикам анализируемой пружины. Такой подход позволяет моделировать процесс деформирования реальной пружины, однако существенно уступает по своим возможностям методике расчета по схеме пространственного бруса.

Статический анализ процесса нелинейного деформирования пружины сводится к математической проблеме решения нелинейной красовой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений зависящей от параметра.

$$d_i^{un} = m_0 \cdot \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \quad m_i^{un} = -J_0 \cdot \frac{\partial^2 \upsilon_1}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где t – время;

m_0 и J_0 – погонные масса и момент инерции стержня, соответственно.

$$\frac{d\{U\}}{dS} = \{F(\{U\}, \lambda)\}, \quad [A_0] \cdot \{U\} = \{U_0\}, \quad [A_1] \cdot \{U\} = \{U_1\}. \quad (5)$$

Здесь $\{U\}$ – вектор состояния (размерностью 12×1 для пространственного стержня и 6×1 для эквивалентного стержня); $\{F\}$ – нелинейная вектор-функция (размерностью 12×12 или 6×6 соответственно); $[A_0]$, $[A_1]$ – прямоугольные невырожденные матрицы граничных условий (6×12 или 3×6); $\{U_0\}$, $\{U_1\}$ – вектора известных краевых условий размером (6×1 или 3×1); λ – параметр, характеризующий процесс нагружения.

Для решения используется метод продолжения решения по параметру. На каждом шаге по параметру (нагрузке или перемещению) используется решение по схеме предиктор-корректор. На этапе предиктор экстраполируется начальное приближение к решению. На этапе корректор решение уточняется итерационными методами.

При динамическом анализе (рисунок 3 – 2 этап) исследуются малые колебания пружины относительно положения равновесия. При этом проблема сводится к задаче на собственные значения. Поскольку разработка алгоритма решения данной проблемы выходит за рамки проведенной работы, при расчетах использовалась программа, разработанная совместно со специалистами МГТУ им. Н.Э. Баумана. В качестве исходных соотношений рассматривались соотношения (1-3) описывающие нелинейную деформацию пространственного стержня. В предположении, что предварительно деформированный стержень совершает малые гармонические колебания около устойчивого положения равновесия, каждая из компонент вектора состояния $\{U_i\}$ стержня и вектора нагрузок представлялась в виде:

$$U_i = U + \Delta U \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (6)$$

где ω – круговая частота колебаний.

Дифференциальные уравнения малых гармонических колебаний механики стержней были получены после подстановки выражений (6) в дифференциальные уравнения равновесия и линеаризации по слагаемым с одинаковыми степенями тригонометрических функций. При этом инерционная нагрузка учитывалась в уравнения малых гармонических колебаний через компоненты амплитуды распределенной нагрузки $\Delta \bar{q} \cos(\omega t)$ и $\Delta \bar{m} \cos(\omega t)$. Таким образом, на основе исходных статических нелинейных уравнений, были получены линеаризованные относительно положения равновесия предварительно деформированной цилиндрической пружины, динамические уравнения.

Инерционная нагрузка входит в дифференциальные уравнения малых гармонических колебаний механики стержней через компоненты амплитуды распределенной нагрузки \bar{q}^0 и \bar{m}^0 .

$$\begin{aligned} \bar{q}_f &= \bar{q}^0 + \mu \cdot \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} = \bar{q}^0 + \mu \cdot \frac{d^2 (\bar{u} + \bar{u}^0 \cdot \cos(\omega \cdot t))}{dt^2} \\ \bar{q}^0 &= \mu \cdot (-1) \cdot \omega^2 \cdot \bar{u}^0 \\ \bar{m}_f &= \bar{m}^0 + [J] \cdot \frac{d^2 \bar{\mathfrak{S}}_f}{dt^2} = \bar{m}^0 + [J] \cdot \frac{d^2 (\bar{\mathfrak{S}} + \bar{\mathfrak{S}}^0 \cdot \cos(\omega \cdot t))}{dt^2} \end{aligned} \quad (7)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathfrak{S}}^0 = e_{23}^0 \cdot \bar{e}_1 + e_{23}^0 \cdot \bar{e}_2 + e_{12}^0 \cdot \bar{e}_3$$

Разработанные методы численного расчета частот и форм колебаний рабочих органов реализованы в виде пакета прикладных программ [2].

Низшие частоты колебаний, подсчитанные для 3 типоразмеров цилиндрических винтовых пружин, предварительно изогнутых по дуге окружности, представлены в таблице 2.

Таблица 2 Расчетные значения низких частот колебаний

Характеристика		1	2	3
Плотность материала, [кг/м ³]	ρ	7800	7800	7800
Диаметр проволоки, [м]	d	0,006	0,0055	0,003
Средний диаметр пружины, [м]	D	0,26	0,065	0,065
Модуль упругости 1-го рода, [н/м ²]	E	$2,0 \times 10^{11}$	$2,0 \times 10^{11}$	$2,0 \times 10^{11}$
Осевой момент инерции сечения, [м ⁴]	$J_{изг}$	$2,545 \times 10^{-10}$	$1,797 \times 10^{-10}$	$1,590 \times 10^{-11}$
Удельная масса по длине, [кг/м]	m_0	0,441	0,371	0,110
Первая частота колебаний, найденная численно, [рад/сек]	ω	183	2681	1480

Особенность поведения пружины в условиях интенсивных виброколебаний вносит свои коррективы в расчет, что выражается в увеличении объемов одновременно обрабатываемого материала, повышению зазоров между витками и укрупнения разрушаемых частиц материала [3].

Суммарный крутящий момент, необходимый для вращения в материале пружинного рабочего органа с условием измельчения, определяется из формулы

$$M_{сум} = M_1 + M_2 + M_3 + M_4, \quad (8)$$

где M_1 – момент, необходимый для разрушения материала, попадающего в межвитковые пространства;

M_2 – момент, необходимый для преодоления сил трения при качении витков пружины друг по другу в случае их соприкосновения, в том числе через слой материала;

M_3 – момент, необходимый для преодоления потерь при колебаниях в материале рабочего органа (внутреннее трение) и в опорных витках (конструкционное трение) и вращение пружины как гибкого вала.

Вследствие малости последними пренебрегаем. Момент, связанный с колебаниями может быть достаточно большим, но его определение аналитически затруднено и требует экспериментальных исследований.

M_4 – момент, необходимый для вращения рабочего органа в смеси с учетом сил сопротивления перемещению;

Расчет потребляемой мощности при работе кинематически деформируемых рабочих органов реализован в виде пакета прикладных программ.

Сопоставительный анализ потребляемой мощности, рассчитанной для работающих в одинаковых условиях пружинных мельниц путем вывода рабочих органов в резонансный управляемый режим, требует 10-20% большей мощности, чем аналогичные аппараты без форсирования их работы.

Производительность пружинных аппаратов, оцененная аналитически, в условиях интенсивных виброколебаний их рабочих органов практически во всех случаях возрастает на 15-30% за счет увеличения объемов подвергаемого обработке материала.

Список литературы

1. Сиваченко Л.А. Оборудование для рудоподготовки адаптивного действия / Сиваченко Л.А., Голушкова О.В., Хононов Д.М., Руссиян А.А. // Горный журнал, 2005. – №6. – С. 55-59.
2. Хононов Д.М. Научно-практические основы повышения эффективности пружинных мельниц путем интенсификации колебаний их рабочих органов: Автореф. дис. канд. техн. наук. – Белгород: БГТУ, 2006. – 23 с.
3. Сиваченко Л.А. Исследование колебаний рабочих органов пружинных технологических аппаратов / Сиваченко Л.А., Хононов Д.М. // Сб. науч. тр. Перспективные технологии материалы и системы Белорусского Российского университета. – Могилев. – 2005. – С. 151-155.

Ф И З И К А

УДК 539.211

*Бармин А.В., канд. техн. наук, доцент кафедры «Физика»**Мосин Ю.В., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Физика»**(Орловский государственный технический университет)**г. Орел, тел.: (4862) 419889; e-mail: scorpl@mail.ru; yurmos@rambler.ru*

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПУЛЬСАЦИЙ ПОТОКА АКТИВНЫХ ЧАСТИЦ ГАЗА

Описан новый метод исследований физико-химических процессов на поверхности твердых тел. Разработан способ экспериментальной реализации данного метода. Приведены результаты проведенных исследований.

Предлагаемый метод исследований [1] основан на использовании явления динамического эффекта реакции для наблюдения за процессами, протекающими на границе твердых веществ и активных газов. Суть метода состоит в следующем. Пусть через проточный реактор непрерывно прокачивается газовая смесь и на поверхности катализатора в стационарных условиях протекает гетерогенная реакция. Будем периодически вводить в реактор дополнительные порции («пакеты») молекул, реагирующих на поверхности твердого катализатора. Длительность τ прохождения через реактор «пакета» активных молекул выбирается из условия их пренебрежимо малого влияния на состояние поверхности катализатора. На периодически следующие «пакеты» накладывается стационарный поток активных частиц. Одновременно регистрируются кинетические кривые изменения со временем концентрации адсорбированных частиц реагирующих веществ и динамического эффекта реакции (ДЭР) [2, 3].

В этом случае, исследуя зависимость амплитуды пульсаций скорости реакции от плотности «пакета» активных молекул и концентрации хемосорбированных на поверхности твердого тела молекул реагирующих веществ, может быть получена однозначная информация о состоянии участвующих в гетерогенных химических превращениях молекул газа.

Изложенный метод исследований реализован применительно к реакциям гетерогенной комбинации частиц газа вида: $A + B \rightarrow AB$, где A , B и AB – молекулы или радикалы газа.

Содержание исследований заключается в следующем. Изучается взаимодействие с твердым телом движущихся вместе с газом – носителем «пакетов» активных частиц газа. За время прохождения «пакетов» через реактор с образцом ~ 1 с состояние поверхности не успевает измениться. На периодически следующие «пакеты» накладывается стационарный поток активных частиц, включаемый на время $\sim 10^2$ с [4].

Для определения механизма, по которому протекает реакция, используется параметр χ , значение которого рассчитывается по формуле

$$\chi \equiv \tau \cdot \frac{J^*}{N^*}, \quad (1)$$

где τ – время релаксации при заполнении поверхности хемосорбированными частицами после включения стационарного источника;

J^* – установившееся значение скорости реакции после включения стационарного источника;

N^* – установившееся значение количества адсорбированных частиц после включения стационарного источника.

Установившееся значение скорости реакции после включения стационарного источника рассчитывается по формуле

$$J^* = 0,25 \cdot n \cdot v \cdot \gamma \quad (2)$$

где v – средняя скорость атомов водорода, сталкивающихся с поверхностью;

γ – коэффициент гетерогенной рекомбинации атомов водорода.

В случае протекания гетерогенной реакции $R + R \rightarrow R_2$ по механизмам Или-Ридила и Ленгмюра-Хиншельвуда должны выполняться условия [2, 5]:

$$\chi < 1; \quad J(t) = a \cdot n \cdot N(t) + b \cdot N^2(t), \quad (3)$$

где J – скорость реакции;

A, B – коэффициенты;

n – концентрация атомов в газовой среде;

N – концентрация хемосорбированных атомов.

В противном случае, когда условия (3) не выполняются, в реакции участвуют физически адсорбированные частицы.

Для исследований применяли спектрально чистые водород и углекислый газ. Для получения водорода (с содержанием примесей $5 \cdot 10^{-3} \%$) в больших количествах используется генератор чистого водорода ГВЧ – 6. Углекислый газ CO_2 получается термическим разложением карбоната кальция $CaCO_3$.

Скорость подачи газа в реакционную камеру при давлении 100 Па составляла 50 мкмоль с^{-1} , что при сечении подводящей трубки $0,9 \text{ см}^2$ соответствует скорости 6 м/с . Этого оказывается достаточным, для того чтобы снять диффузионные ограничения, обусловленные конечной скоростью диффузии атомов, даже для самых быстрых изучаемых реакций.

Концентрация поступающих в реактор атомов водорода (стационарно или в форме «пакетов») определялась в относительных единицах по интенсивности стационарного или импульсного свечения голубой ($\lambda = 487 \text{ нм}$) линии атомов водорода в плазме разряда. Линия в спектре свечения атомов выделялась с помощью монохроматора типа УМ-2. Для измерения интенсивности свечения голубой линии атомов водорода и интенсивности РРЛ применен фотоэлектрический способ регистрации.

Регистрация процессов адсорбции и десорбции активных частиц газа осуществлялась с помощью пьезорезонансных кварцевых весов с чувствительностью $4,4 \cdot 10^{-9} \text{ г}$.

Для создания дополнительных порций («пакетов») активных частиц реагирующих веществ при постоянном давлении был использован высокочастотный генератор типа УВЧ-30-2 ($f = 40,68 \text{ МГц}$, $P_{\text{max}} = 30 \text{ Вт}$). Активные частицы получали в разрядной трубке на пути к реактору в плазме высокочастотного емкостного разряда при включении генератора. Включение – выключение генератора осуществлялось с помощью устройства управления.

Устройство может работать в следующих режимах.

1. Импульсный режим. В реакторе получали пульсации потока активных частиц газа с заданным периодом.

2. Импульсный режим с постоянной составляющей. В реакторе получали пульсации потока активных частиц газа с заданным периодом одновременно со стационарным потоком. Концентрацию частиц в стационарном потоке можно изменять, соответственно изменяя величину постоянной составляющей.

3. Режим постоянной нагрузки. В реакторе получали стационарный поток с постоянной концентрацией активных частиц газа.

В качестве примера исследованы механизмы гетерогенных реакций $H + H \rightarrow H_2$ и $CO + O \rightarrow CO_2$. В качестве катализатора использовали ультрадисперсный порошок меди, имеющий средний диаметр частиц сферической формы 100 нм , или мелкодисперсный люминофор $ZnS-Cu$ с удельной поверхностью $\sim 1 \text{ м}^2 \text{ г}^{-1}$.

Для всех исследованных катализаторов, используя измеренные значения τ и известные из литературы величины γ и N^* , получено: $\chi \gg 1$. Например, при $T = 300 \text{ К}$ в случае ZnS имеем: $\gamma = 3 \cdot 10^{-3}$ [6]; $N^* \leq 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ [7, 8]; $\chi = 10^3$. Сравнивая данные опытов для реакций $H + H \rightarrow H_2$ и $CO + O \rightarrow CO_2$, можно заключить, что величины χ для них соизмеримы. Нарушение условия $\chi < 1$ означает: для использования механизмов Или-Ридила (ИР) и Ленгмюра-Хиншельвуда (ЛХ) при описании изучаемых реакций нет оснований.

Форма кинетических кривых ДЭР $F(t)$ и интенсивности РРЛ $I(t)$ зависит от концентрации n

активных частиц в газовой среде и их природы. В случае когда $n \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$ после включения стационарного разряда величины F и I скачком возрастают и далее практически не меняются со временем, что соответствует независимости скорости реакции от концентрации хемосорбированных реагентов. Этот результат можно объяснить участием в реакции частиц, хемосорбированных на гипотетических активных центрах, концентрация которых лежит за пределами чувствительности адсорбционных измерений. Однако, вероятность того, что на поверхности всех изученных катализаторов одновременно и для реакции $H + H \rightarrow H_2$ и для реакции $CO + O \rightarrow CO_2$ имеются такие весьма немногочисленные, обладающие очень высокой активностью центры катализа, пренебрежимо мала. При этом сечения химических превращений (по ударному механизму Или-Ридила) на таких центрах должны превышать физически оправданные значения. Поэтому изложенные результаты можно трактовать как следствие протекания реакции по механизму рекомбинации частиц, захваченных в преадсорбционное состояние (precursor state [9, 10]), которое можно считать также состоянием физической адсорбции.

Для иллюстрации влияния концентрации активных частиц в газовой среде на форму кинетических кривых $F(t)$ и $I(t)$ рассмотрим результаты, полученные с использованием техники импульсной периодической модуляции величины n . Взаимодействие периодически следующих «пакетов» атомов водорода с катализатором сопровождается появлением пиков ДЭР (рисунок 1), амплитудные значения которых $F_m = F(n + \Delta n)$ на рисунке 2 обозначены точками. Длительность пиков у их основания составляет 3 с.

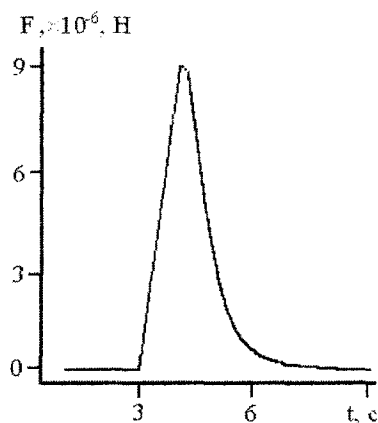


Рис. 1. Форма пика ДЭР $F(t)$ при взаимодействии «пакета» атомов водорода с поверхностью медного образца

Вначале рассмотрим результаты, полученные в случае рекомбинации атомов водорода на поверхности медного катализатора. В нестационарных условиях амплитуда периодически возникающих пиков ДЭР F_m после включения стационарного разряда возрастает и затем не меняется (рисунок 2), при этом она не зависит от концентрации хемосорбированных атомов N , которая возрастает со временем (рисунок 3).

После выключения стационарного разряда величина F_m принимает прежнее значение и наблюдается рекомбинационная десорбция атомов водорода. Форма кинетической (непрерывной) кривой $F(t)$, полученной после включения стационарного разряда, зависит от величины n концентрации атомов в газовой среде: при $n < 1 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ на кривой $F(t)$ наблюдается участок роста, синхронного с ростом концентрации хемосорбированных атомов (рисунок 2, кривая 2); при $n > 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ кривые $F(t)$ имеют прямоугольную форму. В случае фиксированной концентрации Δn атомов в «пакетах» при увеличении стационарной концентрации атомов n (вследствие чего меняется величина N) приращения величины ДЭР в импульсах $\Delta F = F(n + \Delta n) - F(n)$ не возрастают, при этом значения ΔF не зависят от концентрации хемосорбированных атомов N . Если менять величину Δn при постоянных значениях n (и N), то величина ΔF возрастает с ростом концентрации Δn атомов в «пакете».

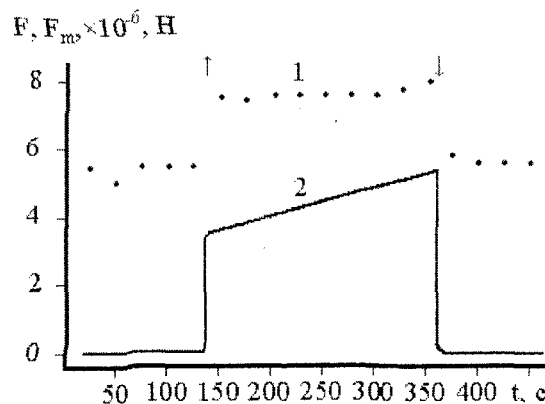


Рис. 2. Зависимость от времени величин F_m (1) и F (2) в случае взаимодействия «пакетов» атомов водорода с поверхностью меди до и после включения (\uparrow) и выключения (\downarrow) стационарного потока атомов водорода

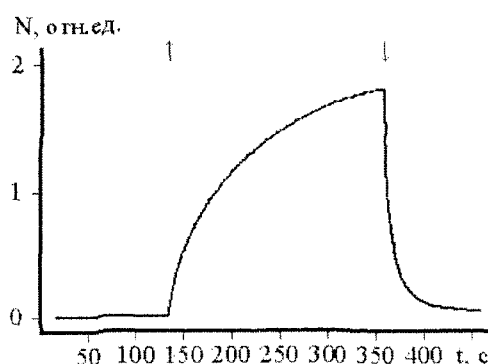
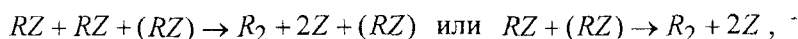


Рис. 3. Зависимость от времени концентрации $N(t)$ хемосорбированных на поверхности меди атомов водорода до и после включения (\uparrow) и выключения (\downarrow) стационарного потока атомов водорода, измеренной одновременно с величинами F и F_m

Симбатные изменения со временем величин N и F попробуем объяснить протеканием гетерогенной реакции $H + H \rightarrow H_2$ по механизмам ИР и ЛХ. Тогда имеем: $F = GJ = \alpha n \cdot N + \beta N^2$, где α и β - коэффициенты. В этом случае изменение в несколько раз концентрации атомов водорода в газовой среде не должно приводить к нарушению симбатного хода кривых $F(t)$ и $N(t)$, что противоречит опыту. Кроме того, для меди не выполняется критерий участия хемосорбированных атомов водорода в химических превращениях: $\chi < 1$. Следовательно, химические превращения протекают с участием физически адсорбированных атомов водорода по одной из схем [11]:



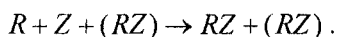
где Z - центр адсорбции;
 RZ - физически адсорбированный атом;
 (RZ) - хемосорбированный атом.

В случае рекомбинации атомов водорода на поверхности люминофора $ZnS-Cu$ характерными являются более медленные изменения со временем измеряемых величин после включения разряда, чем для медного катализатора в тех же условиях. При этом наблюдаются аналогичные закономерности, что позволяет применить указанный механизм реакции к описанию рекомбинации атомов водорода на поверхности сульфида цинка.

В случае протекания гетерогенной реакции $CO + O \rightarrow CO_2$ на поверхности люминофора $ZnS-Cu$ при температуре $T = 295 \text{ K}$ на кинетику РРЛ оказывает влияние значительная, частично необратимая в этих условиях хемосорбция атомов O и молекул CO .

В тех же условиях, но при более высокой температуре ($T = 390 \text{ K}$), количество хемосорбированных частиц CO и O уменьшается в несколько раз, это приводит к уменьшению величины I_m и значительному уменьшению отношения $I_m \Gamma^l$.

Эти результаты не могут быть объяснены участием в гетерогенной реакции хемосорбированных частиц. Используем модель, в которой скорость реакции определяет рекомбинация преадсорбированных частиц CO и O друг с другом. В этом случае выполняется равенство $I_n I^1 \approx n^1 (n + \Delta n)$, что соответствует выполнению условия $J = \eta^{-1} \cdot I \approx 0,5 \cdot k_1 \cdot N_0$. Это максимально возможное значение скорости реакции, поэтому при уменьшении температуры и прочих равных условиях скорость реакции возрастает только за счет увеличения сечения захвата свободных частиц CO и O в преадсорбционное состояние. Эффект связан с увеличением степени покрытия поверхности хемосорбированными частицами при понижении температуры и обусловлен участием хемосорбированных частиц в отводе избыточной энергии при стабилизации на поверхности преадсорбированных частиц по схеме:



Список литературы

1. Макушев И.А., Рогожина Т.С., Бармин А.В. Метод контроля за участием свободных, преадсорбированных и хемосорбированных частиц газа в гетерогенных химических реакциях. // Труды восьмой международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Современные техника и технологии»; – Томск: ТПУ, 2002. – Т. 2. – С. 203-205.
2. Харламов В.Ф. Рекомбинация атомов на поверхности тел и сопутствующие эффекты. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1994. – 207 с.
3. Харламов В.Ф. // Поверхность. – 1993. – № 11. – С. 122.
4. Харламов В.Ф., Рогожина Т.С., Бармин А.В., Макушев И.А., Быковский М.И. Метод определения состояний молекул и радикалов газа, участвующих в гетерогенных химических превращениях. // Письма в журнал технической физики. – 2002. – № 7. – Т. 28. – Вып. 13. – С. 67-73.
5. Харламов В.Ф. // Хим. физика. – 1994. – Т. 13. – № 6. – С. 83-88.
6. Стыров В.В. // Кинетика и катализ. – 1968. – Т. 9. – № 1. – С. 124.
7. Стыров В.В., Ягнова Л.И., Измайлов Ш.Л. // Кинетика и катализ. – 1975. – Т. 16. – № 3. – С. 705.
8. Kisliuk P.J. // J. Phys. Chem.Soc. – 1957. – V. 3. – P. 95; 1958. – V. 5. – P. 78.
9. Птушинский Ю.Г., Чуйков Б.А. Кинетика адсорбции газов на поверхности металлов // Поверхность. 1992. – № 9. – С. 5-26.
10. Matsushima T., Almy D.B., White J.M. // Surf. Sci. 1977. – V. 67. – № 1. – P. 89; P. 122.
11. Харламов В.Ф., Рогожина Т.С. // Конденсированные среды и межфазные границы. – 2002. – Т. 4. – № 2. – С. 162.

УДК 53.15

Варгашкин В.Я., канд. техн. наук, доцент, fellow of Subject Group of Gravitational Physics (Division of Nuclear and Particle Physics, The Institute of Physics, Great Britain)
Лондон, тел.: +44 (0) 20 7470 4800; e-mail: varg@physics.org

ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА НЕЦЕНТРАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ЯВЛЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО САМОЛИНЗИРОВАНИЯ

The formula for the uniform description of some the relativistic precession phenomena is offered. It is shown, that the test control of the relativistic theory can be carried out by measurement of parameters of non-central interaction of light with substance within the limits of the phenomenon gravitational self-lensing in view of achievements extra-atmospheric photometry. Application of the generalized expression for non-central interaction of a gravitational field with moving in it a material point to a deflection of light of stars within the limits of effect gravitational self-lensing can be used as the new test for the control of the General Relativity over the form of lines of equal brightness on images of visible disks of stars.

1. Обзор релятивистских взаимодействий типа прецессии

В релятивистской механике наиболее важными являются три типа прецессий, или вращений линий и плоскостей траекторий движений физических тел как целого объекта.

К первому из них относится вращение плоскости орбиты материальной точки в ньютоновом сферически-симметричном поле тяготения гравитирующего центра массой m_0 . Одним из наиболее важных случаев здесь является эффект Эйнштейна – вращение лучей звезд, распространяющихся в виде инфинитной траектории фотонов на расстоянии r от центра в его центрально симметричном поле тяготения. Полный угол отклонения траектории составляет [1]:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{4Gm_0}{c^2 r}. \quad (1)$$

где G – гравитационная постоянная; c – скорость света в вакууме.

Другим подобным случаем является вращение перигелиев планетных орбит, т.е. плоскостей финитных траекторий движения материальных точек с большой полуосью a и эксцентриситетом e в центрально симметричном поле тяготения. Поскольку траектория движения планеты является финитной, то угол отклонения траектории нормируют на один полный оборот финитного движения:

$$\Delta\varphi_2 = \frac{6\pi Gm_0}{c^2 a(1-e^2)}, \quad (2)$$

Ко второму типу прецессий относится прецессия Лензе-Тирринга [2], или вращение плоскости орбиты материальной точки в поле тяготения гравитирующего центра, обладающего моментом импульса. Частота вращения такой прецессии составляет:

$$\Omega_1 = \frac{2GM_0}{c^2 a^3 \sqrt{(1-e^2)^3}} [\mathbf{n}_0 - 3\mathbf{n}_1(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_0)], \quad (3)$$

где \mathbf{M}_1 – вектор орбитального момента импульса материальной точки, движущейся около гравитирующего центра по финитной орбите с большой полуосью a и эксцентриситетом e :

$$\mathbf{M}_1 = M_1 \mathbf{n}_1; \quad (4)$$

M_1 и \mathbf{n}_1 – соответственно, модуль и единичный вектор орбитального момента \mathbf{M}_1 ; \mathbf{M}_0 – вектор собственного, или планетарного момента импульса гравитирующего центра с модулем M_0 и единичным вектором \mathbf{n}_0 :

$$\mathbf{M}_0 = M_0 \mathbf{n}_0. \quad (5)$$

К третьему типу прецессий относится прецессия Вейля-Шиффа [3], или вращение линии действия собственного (планетарного) момента импульса \mathbf{M}_2 частицы, движущейся около гравитирующего центра по финитной орбите со скоростью \mathbf{v} на удалении r него при условии, что гравитирующий центр также обладает собственным (планетарным) моментом импульсом \mathbf{M}_0 и массой m_0 на удалении r него. Вектор \mathbf{M}_2 , как и ему подобные, представим в стандартном виде

$$\mathbf{M}_2 = M_2 \mathbf{n}_2. \quad (6)$$

с модулем M_2 и единичным вектором \mathbf{n}_2 .

При этом частота анализируемой прецессии составляет:

$$\Omega_2 = \frac{3Gm_0}{c^2 r^2} [\mathbf{n}_2 \times \mathbf{v}] + \frac{GM_0}{c^2 r^3} [3\mathbf{n}_2(\mathbf{n}_2\mathbf{n}_0) - \mathbf{n}_0]. \quad (7)$$

2. Обобщенная формула для нецентрального взаимодействия типа прецессии

Заметим, что прецессиям (2)-(3) можно поставить в соответствие выражения

$$\frac{d\mathbf{M}_1}{dt} = \left[\frac{2GM_0}{c^2 a^3 \sqrt{(1-e^2)^3}} [\mathbf{n}_0 - 3\mathbf{n}_1(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_0)] \times \mathbf{M}_1 \right] \quad (8)$$

и

$$\frac{d\mathbf{M}_2}{dt} = \left[\frac{3Gm_0}{c^2 r^2} [\mathbf{n}_2 \times \mathbf{v}] \times \mathbf{M}_2 \right] + \left[\frac{GM_0}{c^2 r^3} [3\mathbf{n}_2(\mathbf{n}_2\mathbf{n}_0) - \mathbf{n}_0] \times \mathbf{M}_2 \right]. \quad (9)$$

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{M}}{dt}, \quad (10)$$

где \mathbf{N} – вращающий момент, действующий на частицу.

Учитывая (5)-(6) и (10), выражение (8) можно переписать в виде:

$$\mathbf{N}_1 = \frac{2GM_0M_1}{c^2 a^3 \sqrt{(1-e^2)^3}} [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}_1]. \quad (11)$$

Рассмотрим структуру подобного выражения. Для этого представим (11) в более компактном виде:

$$\mathbf{N}_1 = k_1 \frac{M_0M_1}{a^3} \mathbf{a}_1. \quad (12)$$

Структура выражения (12) подобна структуре выражений для базовых фундаментальных взаимодействий – гравитационного

$$\mathbf{F}_1 = G \frac{m_0m}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (13)$$

и электростатического

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0q}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (14)$$

Выявленная структурная аналогия выражений заключается в том, что подобно тому, как обобщенными зарядами взаимодействий (13)-(14) являются соответственно массы m_0 и m , а также электрические заряды q_0 и q , в роли обобщенных зарядов прецессионного планетарно-орбитального взаимодействия выступают модули соответствующих моментов импульсов M_0 и M_1 . При этом в роли силовых факторов для базовых фундаментальных взаимодействий выступают сила всемирного тяготения (13), и кулоновская сила (14), что в случае прецессионного взаимодействия соответствует силовому фактору типа вращающего момента. Это обстоятельство подчеркивает нецентральный характер прецессионного взаимодействия.

Структурным отличием формулы (12) от (13)-(14) является то, что базовые фундаментальные взаимодействия убывают с квадратом расстояния до взаимодействующего обобщенного заряда, тогда как прецессионное взаимодействие является короткодействующим и убывает обратно пропорционально кубу расстояния.

Константа прецессионного взаимодействия является достаточно малой в сравнении с гравитационной G и электрической ϵ_0 постоянными, поскольку содержит член, содержащий отношение гравитационной постоянной и квадрата скорости света. Кроме того, константа включает скалярный множитель, обусловленный усредненным за период движения характером формул Лейбне-Тирринга.

$$k_1 = \frac{G}{c^2} \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)^3}}. \quad (15)$$

Векторный характер формуле (12) придает вектор \mathbf{a}

$$\mathbf{a}_1 = [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}_1], \quad (16)$$

обусловленный взаимной ориентацией единичных векторов \mathbf{n}_0 и \mathbf{n}_1 , в отличие от формул (13)-(14), векторный характер которых обеспечивает радиус-вектор \mathbf{e}_r , соединяющий взаимодействующие тела.

Аналогичные рассуждения можно выполнить для формулы (9) прецессии Вейля-Шиффа. Эта формула включает два слагаемых. Рассмотрим вначале второе из них, обусловленное вращением как гравитирующего центра, так и движущейся вблизи него материальной точки. Перепишем в виде (10) это слагаемое с учетом (5)-(6).

$$\mathbf{N}_2 = \frac{GM_0M_2}{c^2 r^3} [\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_0]. \quad (17)$$

Если далее это выражение переписать в виде

$$\mathbf{N}_2 = k_2 \frac{M_0M_2}{r^3} \mathbf{a}_2, \quad (17)$$

то его структура окажется подобной структуре ранее рассмотренного выражения (12), с той разницей, что в роли обобщенных зарядов здесь выступают два собственных (планетарных) момента импульса, а не пара различных моментов – собственного и орбитального. Рассматриваемое планетарно-

планетарное взаимодействие, как и планетарно-орбитальное, убывает обратно пропорционально кубу расстояния. Константа k_2 взаимодействия

$$k_2 = \frac{G}{c^2}, \quad (18)$$

как и константа k_2 , содержит отношение двух фундаментальных физических констант. Как показывает анализ, более простой вид (18) в сравнении с (15), обусловлен тем, что в формуле (7), полученной Вейлем и Шиффом, не было осуществлено усреднение частоты вращения по периоду вращения, вследствие чего в (18) отсутствует сомножитель, подобный тому, который приводит (15) к усредненному виду.

Вектор \mathbf{a}_2

$$\mathbf{a}_2 = -[\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}_2], \quad (19)$$

как и вектор \mathbf{a}_1 (16) определяется векторным произведением единичных векторов \mathbf{n}_0 и \mathbf{n}_1 моментов импульса, с той разницей, что замена \mathbf{n}_1 на \mathbf{n}_2 с целью перехода от (16) к (19) требует также замены знака всего векторного произведения.

Таким образом, прецессия Лензе-Гирринга, как и Прецессия Вейля-Шиффа, в обобщенном виде может быть описана формулой, подобной формулам (13)-(14) фундаментальных взаимодействий в природе и имеющей вид

$$\mathbf{N} = \pm \frac{G}{c^2} \frac{M_0 M}{r^3} [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}], \quad (20)$$

в соответствии с характером которого вращающиеся моменты \mathbf{M}_0 и \mathbf{M} , где \mathbf{M}_0 является собственным (планетарным), а \mathbf{M} может быть как собственным, так и орбитальным, взаимодействуют с моментом силы \mathbf{N} , значение которого убывает обратно пропорционально кубу расстояния между взаимодействующими моментами импульса. Направление момента \mathbf{N} определяется направлением векторного произведения единичных векторов \mathbf{n}_0 и \mathbf{n} взаимодействующих моментов импульса, причем знак момента силы \mathbf{N} определяется характером момента импульса \mathbf{M} .

Заметим, что структура первого слагаемого выражения (9) также можно отнести к виду (20). Это слагаемое обусловлено неньютоновостью сферически-симметричного поля гравитирующего центра и может быть приведено к виду:

$$\mathbf{N}_{01} = 3 \frac{G}{c^2} \frac{M_{01} M_2}{r^3} [[\mathbf{n}_2 \times \boldsymbol{\tau}] \times \mathbf{n}_2]. \quad (21)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории материальной точки. Такой тип взаимодействия носит «смешанный» характер, поскольку в выражение (21) в качестве обобщенного заряда входит «смешанный» момент импульса, который строится на скорости v движения и радиусе-векторе \mathbf{r} движущейся материальной точки и массе m_0 гравитирующего центра. Вторым обобщенным зарядом является собственный (планетарный) момент импульса M_2 материальной точки.

И, наконец, прецессию (2) материальной точки в неньютоновом сферически-симметричном гравитационном поле, нельзя отнести к виду (20). В [3] показано, что вращение перигелия орбиты движущейся в поле материальной точки происходит с усредненной за период частотой, равной

$$\Omega_{02} = \frac{6\pi G m_0}{c^2 a(1-e^2) T} \mathbf{n}_1. \quad (22)$$

Поскольку в ходе реализации этой прецессии орбитальный момент импульса \mathbf{M}_1 должен вращаться, то по аналогии с (8)-(9) можно записать:

$$\frac{d\mathbf{M}_1}{dt} = \left[\frac{6\pi G m_0}{c^2 a(1-e^2) T} \mathbf{n}_1 \times \mathbf{M}_1 \right]. \quad (23)$$

Несложно заметить, что векторное произведение в правой части (24) равно нулю, поскольку линии действия векторов орбитального момента импульса и частоты прецессионного вращения лежат на одной прямой. Согласно (10) момент силы, ответственный за эту прецессию является нулевым, а следовательно, такая прецессия является релятивистским следствием движения материальной точки в поле силового взаимодействия, носящего характер центрального. Подобное же утверждение

справедливо и для распространения световых лучей в неньютоновом сферически симметричном гравитационном поле.

Однако именно этот тип взаимодействий наиболее хорошо изучен. В частности, отклонение лучей, измеренное вблизи Солнца для звезд 118000 со спутника ESA «Hipparcos», позволило утверждать, что экспериментальные данные согласуются с выводами теории относительности с систематической и случайной погрешностью, не превышающей 0,3% по параметризованному постньютонову параметру γ , представляющему собой приведенное к теории относительности искривление пространства-времени, формируемое единичной массой покоя.

Поскольку собственный (планетарный) момент импульса M_0 Солнца достаточно мал, то в настоящее время тестовые измерения параметров прецессии Лензе-Тирринга и Вейля-Шиффа, в частности, для световых лучей, которые распространяются в окрестностях Солнца, являются технически неосуществимыми.

Однако в последние годы в Интернете появились сообщения [4] о разрешении дисковидных изображений звезд с использованием ПЗС-матриц и телескопов, располагающихся на спутниковых астрономических обсерваториях. При этом, тестовый контроль характеристик нецентрального взаимодействия типа (20), основанный на контроле отклонения лучей, может быть выполнен с использованием явления гравитационного самолинзирования света.

4. Явление гравитационного самолинзирования

Явление гравитационного самолинзирования света представляет собой отклонение лучей видимого диска звезды, формируемое гравитационным полем этой же самой звезды. Луч звезды, испущенный из точки S , которая видна из точки наблюдения N под углом, отклоняется гравитационным полем этой же звезды на угол, равный разности углов наклона касательных в точках испускания S и наблюдения N . Вследствие этого луч поступает к наблюдателю под углом s , который больше угла α . (рисунок 1) Несложно заметить, что наблюдаемое с Земли отклонение видимого края Солнца, обусловленное тяготением самого Солнца не превышает половинного эффекта Эйнштейна (1), т.е. 0,87 угловой секунды, тогда как видимый радиус Солнца достигает 0,25 углового градуса. При этом влияние на лучи описываемого эффекта гравитационного самолинзирования «тонет» на фоне видимой с Земли протяженной геометрии самого Солнца. Однако, теоретическое значение отклонения лучей при росте удаления звездоподобного объекта от наблюдателя, асимптотически стремится к половинному эффекту Эйнштейна, тогда как видимые угловые размеры объекта уменьшаются, становясь сопоставимыми по своим значениям с половинным эффектом Эйнштейна. Это обстоятельство может позволить выполнить измерения, необходимые для тестового контроля теории относительности по параметрам нецентрального взаимодействия вида (20).

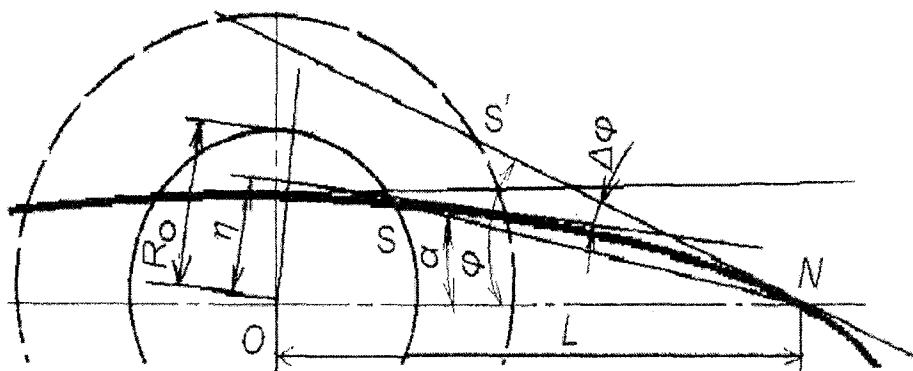


Рис. 1. Ход лучей в процессе гравитационного самолинзирования света

В работе [5] показано, что явление гравитационного самолинзирования должно сопровождаться перераспределением яркости по видимому диску звездоподобного объекта.

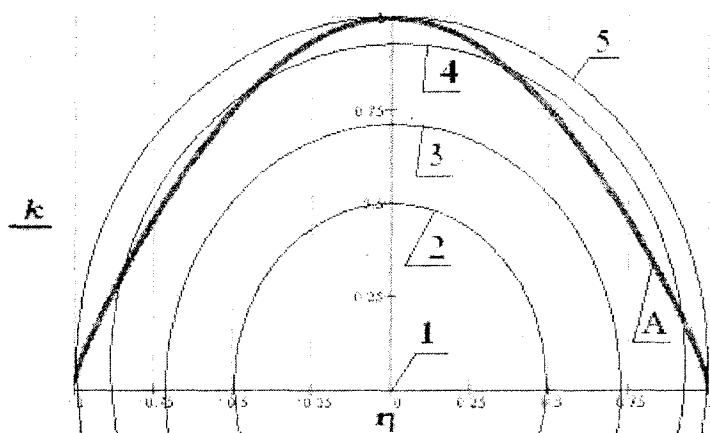


Рис. 2. Распределение яркости по видимому диску звездоподобного объекта в результате явления гравитационного самолинзирования

Экспериментальные данные, полученные с помощью телескопа Хаббл (рисунок 3а), содержат фотографию звезды α Ori (Betelgeuze), разрешенную в виде диска диаметром приблизительно 150 пикселей. Это позволяет рассуждать о возможности построения кривой распределения яркости вдоль видимого диска звезды.

На распределение яркости влияют два основных фактора – потемнение изображения к краю, обусловленное неравномерностью температур по толще объема звезды, и релятивистское отклонение лучей, обусловленное ее гравитацией. Последнее является следствием взаимодействия прецессионного типа. Это обуславливает возможность использования фотографий звезд для тестового контроля гравитационных теорий.

На распределение яркости вдоль видимого диска Солнца (рисунок 3б) действуют факторы, аналогичные рассмотренным выше. Однако угловой видимый размер Солнца существенно превосходит углы гравитационного отклонения лучей. Вследствие этого фактор гравитации в случае с Солнцем можно считать пренебрежимо малым и использовать кривую распределения яркости по диску Солнца в качестве калибровочной кривой для построения распределения яркости звезд по их видимому диску. Звезда Бетельгейзе по своим спектральным и яркостным характеристикам существенно отличается от Солнца. Поэтому использование подобной калибровки кривой распределения яркости для Бетельгейзе может быть выполнено лишь с известной долей осторожности. Однако в настоящее время Солнце является единственным звездоподобным объектом, для которого может быть построена кривая распределения яркости по видимому диску путем непосредственных измерений яркости.

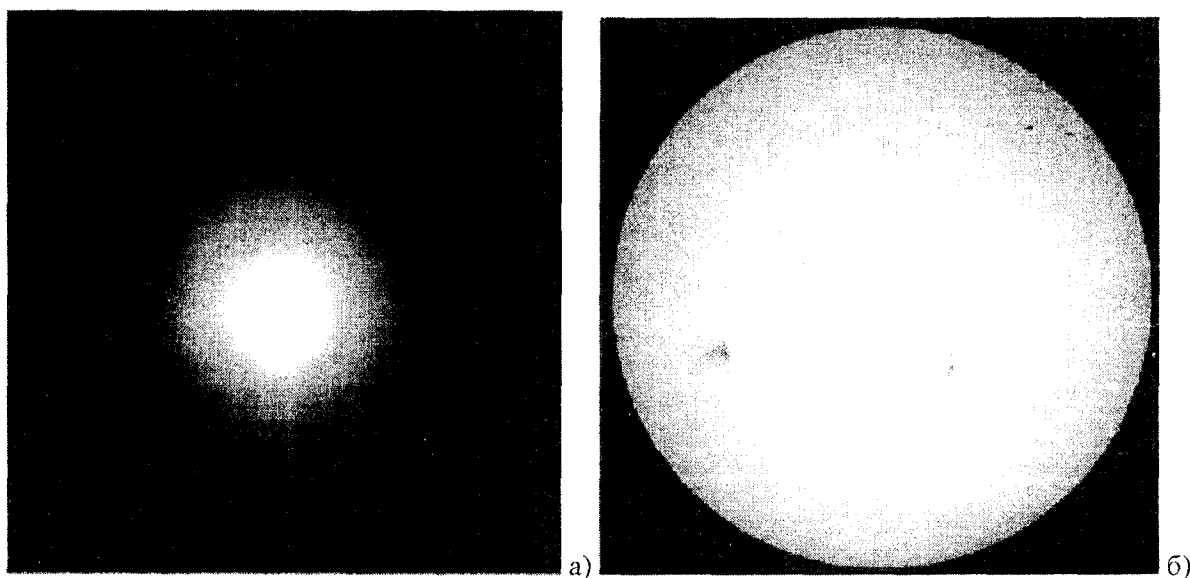


Рис. 3. Различия в потемнении к краю изображения видимого диска звезды α Ori (Betelgeuze) а) и Солнца б)

В результате исключения фактора негравитационного потемнения изображения к краю в ходе описанной калибровки может быть построена кривая распределения яркости вдоль видимого диска звезды, обусловленная лишь гравитационным искривлением лучей. Это искривление включает эйнштейново отклонение лучей сферически-симметричным полем, а также дополнительное отклонение лучей, обусловленное отклонением поля тяготения звезды от сферически симметричной формы. Это отклонение формируется, в частности, за счет отклонения от сферичности геометрии поверхности самой звезды, а также за счет наличия у нее момента импульса, т.е. за счет исследуемого прессионного взаимодействия поля звезды с испущенными ею же световыми лучами. В пользу возможности экспериментальных исследований подобного дополнительного отклонения лучей свидетельствует отчетливо различимое на рисунке 3а (в отличие от рисунка 3б) отклонение от круглости видимого диска звезды Бетельгейзе.

Повышение точности новейших оценок степени согласия экспериментальных данных с полученными обобщенными формулами для нецентрального взаимодействия может быть достигнуто за счет получения новых изображений дисков звезд. Кроме того, увеличение точности может быть достигнуто за счет специального отбора звезд для разрешения их дисков и получения подобных оценок. Во-первых, отобранные звезды должны быть однотипны с Солнцем по своему спектральному классу для обеспечения достоверности калибровки их кривой яркости с использованием аналогичной кривой для Солнца. Во-вторых, для анализа следует выбирать звезды с минимальными отклонениями их формы от сферичности с целью минимизации погрешности оценивания, вызванной отклонением гравитационного поля звезды от сферичности за счет отклонения от сферичности ее геометрической формы.

Следует также заметить, что статистическое устранение асимметрии кривой распределения яркости вдоль видимого диска звезды приводит к исключению фактора отклонения от сферичности гравитационного поля звезды. При этом форму получившейся остаточной кривой с симметричными ветвями определяет значение параметризованного постньютонова параметра γ , который представляет собой относительную кривизну пространства-времени, создаваемую единичной массой покоя, и равен единице в теории относительности. Поэтому предлагаемая методика экспериментального исследования взаимодействий нецентрального типа может быть также использована для тестового контроля гравитационных концепций по ппн-параметру γ .

5. Выводы

Получено обобщенное выражение для нецентрального взаимодействия гравитационного поля с движущейся в нем материальной точкой для описания отклонения лучей звезд, которое в рамках эффекта гравитационного самолинзирования может быть использовано в качестве нового теста для контроля теории относительности по форме линий равной яркости на изображениях видимых дисков звезд.

Список литературы

1. Einstein A. // Ann.Phys. – 1916. – Vol. 49. – P. 769 – 822.
2. Lense J., Thirring H. // Phys. Zs. – 1919. – Bd. 19. – P. 156.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: [В 7 т.]. – Теория поля. – Т.2. – Изд. 6-е, исп. и доп. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
4. <http://opposite.stsci.edu/pubinfo/PR/96/04.html>
5. Vargashkin V.Ya. The phenomenon of gravitational self-lensing // PIRT-2003. – Moscow, BSTU. – 2003. – P. 60-68.

УДК 539.211

Мосин Ю.В., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Физика»
(Орловский государственный технический университет)
г. Орел, тел.: (4862) 419889; e-mail: yurmos@rambler.ru

АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Исследовалась радикалорекомбинационная люминесценция кристаллфосфоров в потоках атомов. Обнаружены автоколебания интенсивности радикалорекомбинационной люминесценции.

Возникновение упорядоченных структур в однородной среде – одна из фундаментальных научных проблем, волнующая научную общественность. В открытых неравновесных системах выделяются два типа упорядоченного поведения: диссипативные структуры, которые образуются и существуют благодаря потоку энергии, проходящей через систему; автоволны, возникающие в пространстве с локальными источниками автоколебаний – незатухающих колебаний, характерных для нелинейных динамических систем.

В 2006 г. исполняется 55 лет открытия Б.П. Белоусовым автоколебательной химической реакции, благодаря которому появилась возможность наблюдать эволюцию диссипативных структур и автоволн в гомогенной химической системе.

На установке, собранной на кафедре физики ОрелГТУ, проводились исследования гетерогенных колебательных процессов. Эти процессы протекали на поверхности твердых тел, помещенных в среду диссоциированных газов. В частности в опытах неоднократно наблюдались автоколебания интенсивности $I(t)$ радикало-рекомбинационной люминесценции (РРЛ) на порошкообразном люминофоре ZnS-Cu, находящемся в среде атомарного водорода.

В ходе исследований были получены следующие результаты.

Автоколебания самопроизвольно возникали после длительной обработки образца (до нескольких суток) атомно-молекулярной смесью водорода. Характерно, что автоколебания наблюдались в узком интервале давлений смеси (50÷60 Па). Увеличение, либо уменьшение давления сопровождалось исчезновением автоколебаний.

После появления автоколебаний форма кривых $I(t)$ была близка к пилообразной. Период колебаний около 200 с. Дальнейшая обработка образца атомами водорода приводила к трансформации кривых, которые через несколько часов приобретали более выраженную синусоидальную форму, при этом период колебаний не изменялся, а амплитуда немного увеличивалась (рисунок 1).

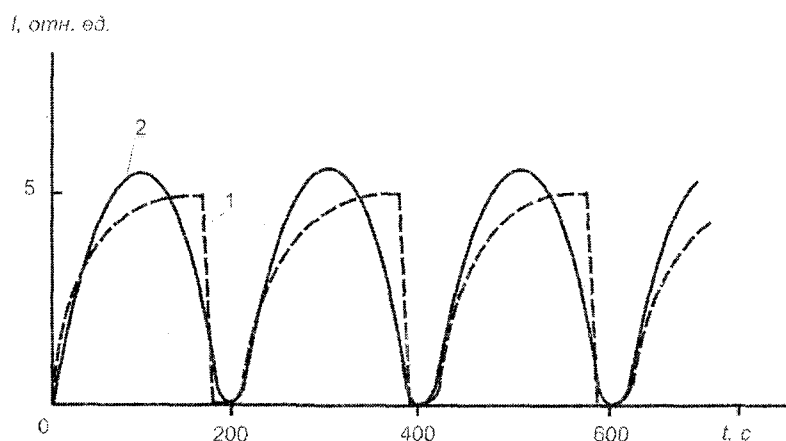


Рис. 1. Автоколебания интенсивности РРЛ люминофора ZnS-Cu в атомарном водороде ($P = 50$ Па, $T = 300$ К): 1 – после возникновения автоколебаний; 2 – спустя 12 ч

Прогрев образца при температуре около 400 К в среде атомов водорода приводил к исчезновению автоколебаний, которые затем самопроизвольно возникали через 2 часа после окончания про-

грева, при этом амплитуда колебаний оставалась первоначальной, а период возрастал.

После выключения источника атомов интенсивность РРЛ скачком падала до нуля. При включении источника атомов автоколебания возобновлялись без изменения амплитуды и частоты, если длительность «темновой» паузы (выключение-включение источника атомов) была меньше периода. В случае же если длительность «темновой» паузы превышала период автоколебаний, то происходило уменьшение частоты колебаний и сглаживание вершин синусоиды. Однако через 2-3 периода колебания принимали прежний вид (рис. 2). После длительных пауз (более 10 часов) автоколебания исчезали и возобновлялись только после 1,5 часа обработки образца атомами водорода в тех же условиях.

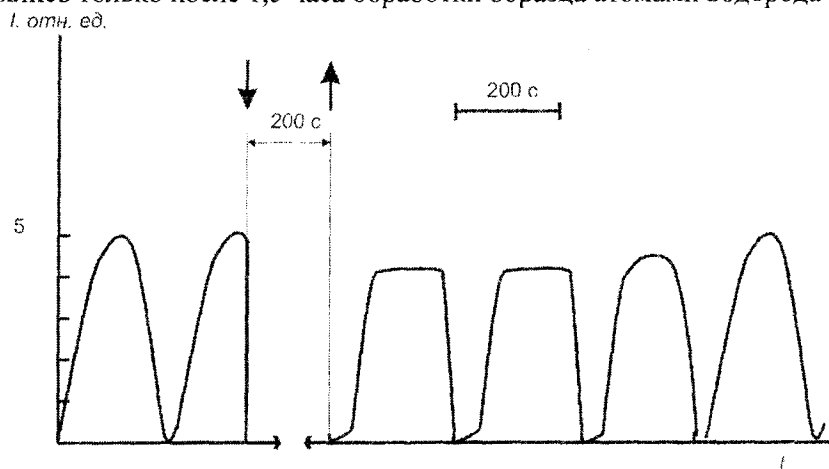


Рис. 2. Кинетика автоколебаний интенсивности РРЛ кристаллофосфора ZnS-Cu после выключения (↓) и включения (↑) источника атомов водорода. $T = 300 \text{ K}$; $n_{\text{H}} = 10^{13} \text{ см}^3$

Какие результаты следует ожидать в дальнейшем? Известно, что в гомогенных системах, где идет колебательный процесс, могут возникать пространственные структуры. Так, например, реакция Белоусова-Жаботинского без перемешивания сопровождается возникновением различных дву- и трехмерных структур (концентрических колец, спиралей, волновых фронтов и т. п.) [1]. В этой связи можно предположить, что и в случае автоколебательных процессов на поверхности ZnS-Cu, помещенного в среду атомарного водорода, должны образовываться пространственные структуры.

Кроме того, учитывая, что колебательный процесс – это процесс самоорганизации, фундаментальным принципом которого является формула [2]:

Формирование структуры вдали от равновесия = Следствие кооперативного поведения, следует ожидать какого-то проявления кооперативного поведения излучающих атомов, например, частичной поляризации РРЛ.

Рассмотрим перспективы возможного применения колебательных химических процессов. Отличительной особенностью колебательных процессов является их высокая чувствительность к малейшим внешним возмущениям. Чувствительность колебательной реакции к незначительным изменениям условий проведения эксперимента отмечена и в наших экспериментах. Так, было установлено, что на характер автоколебаний интенсивности РРЛ влияет не только давление и температура, а также изменения концентрации микропримесей, содержащихся, как на поверхности люминофора, так и в атомно-молекулярной среде водорода. Проведение исследований в этой области открывает огромные перспективы по созданию принципиально новых методик анализа микроколичеств веществ. Количественной основой для определения различных микропримесей (и слабых внешних воздействий) может быть зависимость периода автоколебаний от концентрации реагентов. Поскольку измерение периода колебаний – одна из простых и точно выполняемых операций, то автоколебательные химические реакции можно использовать в аналитических целях.

Список литературы

1. Жаботинский А.М. Концентрационные колебания. – М.: Наука, 1974.
2. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. Введение в теорию диссипативных структур. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

ХИМИЯ

УДК 542.61+543.544

Колова В.И., канд. хим. наук, доцент кафедры «Химия»
(Орловский государственный технический университет)
г. Орел, тел. (4862) 419892; e-mail: chemistry@ostu.ru

ЭКСТРАКЦИОННО-ХРОМАТОГРАФИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЖЕЛЕЗА (III) НА КОЛОНКЕ С РАСПЛАВОМ ТРИОКТИЛФОСФИНОКСИДОМ

В данной статье представлены результаты исследований в системе Fe (III) – ТОФО в метилэтилкетоне-HCl. Показана возможность использования расплавленного ТОФО как неподвижной фазы.

Экстракционная хроматография сочетает в себе достоинства экстракции и хроматографии и является удобным методом для решения разнообразных задач аналитической химии. За счет многократного повторения элементарных актов экстракции удается разделять элементы с близкими свойствами [1].

В последнее время возросло число исследований, посвященных экстракции ионов металлов расплавами органических веществ, так называемыми легкоплавкими экстрагентами.

Основные особенности таких экстрагентов заключаются в том, что практически во всех подобных системах наблюдается увеличение реакционной способности экстрагента в расплаве, сдвиг оптимальной области экстракции в кислую область, улучшение кинетики процесса [2].

Ранее нами [3] была показана возможность использования расплава триоктилфосфиноксида (ТОФО) как неподвижной фазы для экстракционно-хроматографического поведения скандия в системе расплавленный экстрагент (ТОФО) – водная фаза.

Целью данной работы явилось изучение поведения расплавленного триоктилфосфиноксида (ТОФО) $t_{пл} = 55^\circ\text{C}$ на колонке при использовании в качестве носителя – порошок полихрома – 1, размером 0,25 – 0,30 мм. Объектом исследований было выбрано железо-Fe (III).

В данной статье рассмотрено экстракционно-хроматографическое поведение железа (III) в системе расплавленный экстрагент (ТОФО) – водная фаза.

В работе использовали кислоты: HNO_3 (1:1), HCl (1:1), стандартный раствор Fe (III).

Стандартный раствор содержанием 10 мг/мл готовили путем растворения металла «чда» в соляной кислоте (1:1).

10%-ный раствор роданида аммония получали растворением навески реагента в 100 мл воды.

Экстракцию Fe (III) проводили в термостатированных стеклянных колонках высотой до 100 мм и внутренним диаметром 5 мм.

Органическую фазу на колонку наносили в виде раствора ТОФО в метилэтилкетоне, последний удаляли продувкой колонки воздухом. По разнице в весе колонки с ТОФО и без него определяли объем органической фазы ($V_{орг}$), свободный объем ($V_{св}$) колонки устанавливали введением в нее Fe (III) до равенства концентраций в исходном растворе и элюате. Затем вымывали водой, находящийся в колонке раствор и определяли в нем содержание железа. Зная исходную концентрацию и количество Fe (III) в элюате, вычисляли свободный объем колонки. Высота столба носителя – 50 мм.

Методика работы состояла в следующем: через подготовленную к работе колонку пропускали 1-2 мл соляной кислоты соответствующей концентрации. Затем вводили раствор, содержащий Fe (III). Элюирование производили подходящим раствором элюента. Собирали фильтрат по 1 свободному объему. Определяли содержание ионов Fe (III) в нем, строили кривые элюирования.

Количественное определение содержания ионов Fe (III) в растворе после рекстракции проводили фотоколориметрически с роданидом аммония. [3].

Нами были рассмотрены зависимости коэффициентов распределения Fe (III) от концентрации соляной кислоты и железа в водной фазе, а также зависимость ВЭТТ от концентрации ТОФО и соляной кислоты. Полученные данные приведены в таблицах.

Коэффициенты распределения рассчитывали по формуле:

$$D = \frac{V_{mr} - V_{cb}}{V_{орг}}$$

где D – коэффициент распределения;
 V_{mr} – общий удерживаемый объем, мл;
 V_{cb} – 0,5 мл – величина свободного объема колонки;
 $V_{орг}$ – 0,01 мл – объем экстрагента ТОФО.

Расчет ВЭТТ проводили по формуле:

$$N = 8 \cdot \left(\frac{V_{mr}}{\beta} \right)^2,$$

$$h = \frac{H}{N},$$

где N – число теоретических тарелок;
 V_{mr} – общий удерживаемый объем (мл);
 β – ширина пика кривой элюирования при $s=0,368$;
 h – высота эквивалентной теоретической тарелки, мм;
 H – высота столба носителя (мм).

Таблица 1. Зависимость ВЭТТ от концентрации раствора HCl с различным количеством экстрагента

HCl, M	V_{mr} , мл	β , мл	N	h	кол-во ТОФО, мг	Fe, мкг	$V_{орг}$, мл	V_{cb} , мл	D
0,3M	1,4	0,3	189	0,32	10 мг	50 мкг	0,01	0,4	100
0,5M	3,5	0,6	269	0,23					310
0,7M	4,9	0,8	288	0,21					450
1,0M	9,6	0,8	1152	0,056					920
0,3M	3,0	1,2	50	1,0	25 мг	200 мкг	0,03	0,5	80
0,5M	4,5	1,3	98	0,51					133
0,7M	7,0	1,6	155	0,32					216
0,3M	2,5	2,6	8	6,25	200 мг	1000 мкг	0,2	0,5	10
0,5	3,5	3,2	9	5,24					15
0,7	5,0	7,4	3,7	13,51					23

Таблица 2. Зависимость ВЭТТ от концентрации раствора соляной кислоты

HCl, M	V_{mr} , мл	β , мл	N	h, мм
0,3M	1,2	0,8	18	3,33
0,5M	4,4	0,8	242	0,25
0,7M	6,0	0,8	450	0,13
1,0M	9,6	0,8	1152	0,056

Таблица 3. Некоторые параметры колонок в системе расплав ТОФО – 0,3M HCl

Кол-во ТОФО мг	h, мм	Емкость по экстрагенту г/г носителя	Емкость по Fe ³⁺ мкг	Fe:ТОФО
10	0,32	0,015	235	1:6,2
25	1,0	0,05	596	1:6,0
200	6,25	0,37	4200	1:6,9

Проведены были также исследования по влиянию температуры на экстракцию Fe(III) расплавом ТОФО в смеси нафталина (40 масс. %) с дифенилом (ЭСНД). Количество ТОФО во всей серии опытов сохраняли постоянным, равное 0,010 г.

Определение коэффициентов распределения производили по кривым элюирования. Величины коэффициентов распределения определяли аналогичным образом в диапазоне температур 40°C-70°C с интервалом в 10°C.

Сорбированное из 6М раствора HCl Fe(III) элюировали из колонки во всех опытах 0,5 М раствором HCl. Количество нанесенного раствора Fe(III) составляло 50 мкг.

Изучение влияния температуры на экстракционно-хроматографическое поведение Fe(III) с расплавом ТОФО в ЭСНД позволило установить, что с увеличением температуры наблюдается возрастание коэффициентов распределения.

Поскольку константа экстракции связана с коэффициентами распределения, можно утверждать, что с повышением температуры $K_{\text{экстр. Fe(III)}}$ в этой системе также возрастает.

Анализируя полученные данные, следует сделать следующий вывод:

1. Система Fe(III) – ТОФО в метилэтилкетоне – HCl химически устойчива, прочно удерживается сорбентом, не меняет экстракционных характеристик при многократном повторении процесса экстракции-реэкстракции, дает хорошую повторяемость результатов.

2. С увеличением температуры на экстракцию Fe(III) расплавом ТОФО в смеси нафталина (40 масс.%) с дифенилом (ЭСНД) наблюдается возрастание коэффициентов распределения.

Список литературы

1. Экстракционная хроматография. Пер. с англ. / Под ред. Т. Брауна и Г. Герсина. – М.: Мир, 1978. – 627 с.
2. Золотов Ю.А., Кузьмин Н.М. Концентрирование микроэлементов. – М.: Химия, 1982.
3. Комова В.И. Экстракционно-хроматографическое поведение скандия на колонке с расплавом триоктилфосфиноксидом. Известия ОрелГТУ. Серия «Легкая и пищевая промышленность». – №5-6. – 2005. – С. 59.
4. Бусев А.И., Типцова В.Г., Иванов В.М. Руководство по аналитической химии редких элементов. – М., 1978.

УДК 536.7, 541.8

Куценко С.А., докт. техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Химия»

Цымай Д.В., канд. техн. наук, доцент кафедры «Химия»

Малофеев С.М., аспирант кафедры «Химия»

Суханова В.А., аспирант кафедры «Химия»

(Орловский государственный технический университет)

г.Орел, тел. (4862) 419892; e-mail: chemistry@ostu.ru

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РАВНОВЕСНЫХ СОСТАВОВ В СИСТЕМЕ $\text{MgCO}_3 - \text{CO}_2 - \text{SO}_2$

Выполнен анализ равновесных составов системы $\text{MgCO}_3 - \text{CO}_2 - \text{SO}_2$ при различных температурах путем решения системы нелинейных уравнений закона действующих масс относительно степеней полноты линейно-независимых реакций. Установлена возможность практически полной очистки топочных газов от соединений серы при использовании известняка или извести в интервале температур от 500 до 1300 – 1600 К.

Органическое топливо было и остается основным источником энергии. Около 80% потребностей человечества в энергии удовлетворяется за счет нефти, угля, природного газа. Доля их в балансе электроэнергетики несколько ниже, но тоже высока – почти две трети (39% – уголь, 16% – природный газ, 9% – жидкие топлива).

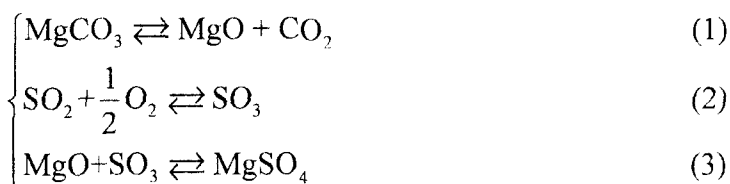
Уголь вносит наибольший вклад в мировой баланс производства первичных энергетических

ресурсов и в то же время является наиболее загрязняющим окружающую среду топливом. Простейший расчет объемного содержания сернистого газа SO_2 , который выделится при сжигании угля с содержанием 85% углерода и 2% серы, с учетом избытка воздуха 10% дает результат около 0,15% (объемных). Массовое содержание сернистого газа в отходящих газах близко к $4,5 \text{ г/м}^3$, при средне-суточной ПДК сернистого газа – $0,05\text{-}0,5 \text{ мг/м}^3$.

Традиционные методы очистки угля дороги и обеспечивают удаление серы не более чем на 30%. Поэтому наиболее эффективным методом удаления серы является ее связывание непосредственно в процессе сгорания топлива. Оксид серы может быть поглощен из топочных газов соединениями щелочных и щелочноземельных металлов. Например, для этой цели используются недорогие известняк (CaCO_3) или известь (CaO), продуктами взаимодействия которых с SO_2 могут быть сульфат кальция и его сульфит [1]. Для тех же целей возможно использовать магнезит. В результате его взаимодействия с SO_2 образуются сульфат магния (MgSO_4) или его сульфит (MgSO_3). Однако теоретических и практических данных по его использованию в литературе отсутствуют.

Эффективность указанного реагента можно оценить, рассмотрев происходящие процессы с позиций химической термодинамики. Стандартную свободную энергию Гиббса ΔG , характеризующую возможность протекания соответствующей реакции рассчитывали по обобщенному уравнению Гиббса – Гельмгольца: $\Delta G_{\text{реак.}}^0 = \Delta H_{\text{реак.}}^0 - T\Delta S_{\text{реак.}}^0$.

Результаты выполнения расчетов представлены графически на рисунке 1 для возможных реакций в системе $\text{MgCO}_3\text{—SO}_2\text{—O}_2$:



или суммарная реакция:

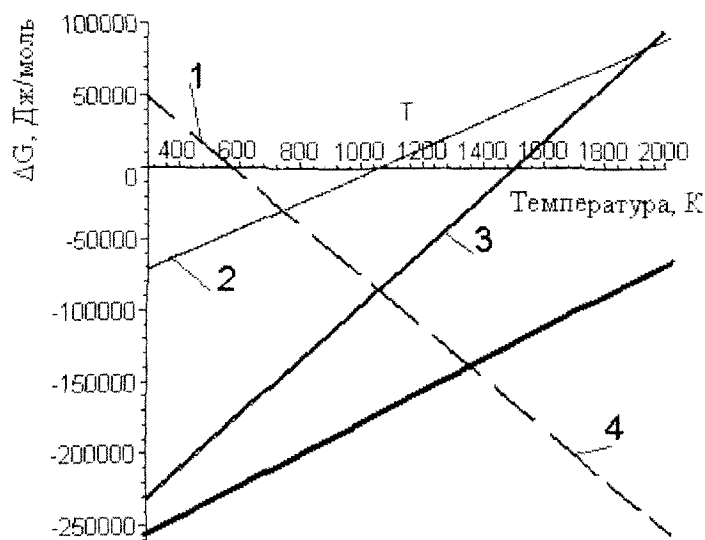
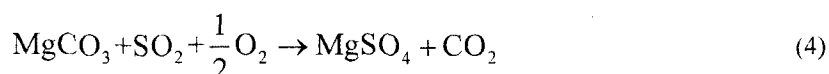


Рис. 1. Зависимость свободной энергии Гиббса от температуры для реакций в системе $\text{MgCO}_3\text{—SO}_2\text{—O}_2$

Как видно из приведенных данных (рисунок 1), реакции сероочистки как при использовании известняка (MgCO_3) так и обожженной извести (MgO) при температурах ниже 2000 К имеют примерно одинаковые значения энергии Гиббса (реакции (3) и (4)). Однако как показывает практика [2], степень связывания SO_2 известью в сопоставимых условиях выше, чем для известняка. Окончатель-

ный выбор мог бы быть сделан при сравнении равновесной степени поглощения диоксида серы известняком и оксидом кальция.

Поскольку известные методики термодинамических расчетов не позволяют рассчитывать равновесные составы химических систем с участием конденсированных фаз, нами была предпринята попытка оценить их исходя из предположения, что рассматриваемая система $MgCO_3 - SO_2 - O_2$ представляет идеальный раствор. Использование данного подхода можно обосновать значительным измельчением твердой фазы до размеров порядка $10^{-6}-10^{-7}$ м. Таким образом, все химические вещества входящие в систему образуют псевдогомогенную смесь, между частицами которой отсутствуют межмолекулярные взаимодействия. Таким образом, рассматриваемая система имеет свойства идеального раствора и для нее выполняется уравнение:

$$\sum_{j=1}^m x_j = 1, \quad (9)$$

где x_j – мольная концентрация j -го вещества в системе;

m – общее число веществ в системе.

Из всех возможных протекающих при взаимодействии химических реакций выделяли систему линейно-независимых реакций. Выбор системы линейно-независимых реакций зависит от выбора базисных компонентов химической системы.

Число линейно-независимых реакций, r , определяется по формуле:

$$r = m - n, \quad (10)$$

где n – число базисных компонентов.

Базисные компоненты первоначально выбирали таким образом, чтобы при их взаимодействия можно было бы получить все возможные химические вещества, находящиеся в системе. Определение системы линейно-независимых реакций аналогично определению линейно-независимых алгебраических уравнений. [3, 4]

Для выбранной системы линейно-независимых реакций составлялась система уравнений на основе закона действующих масс.

$$\prod_{j=1}^m x_j^{\alpha_{ij}} = K_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad (11)$$

где x_j – мольная концентрация j -го вещества;

K_i – константа равновесия i -й химической реакции;

α_{ij} – стехиометрический коэффициент j -го вещества в i -й реакции.

Величины констант равновесия, K_i , представлены как функции температуры по уравнению:

$$K_i = \exp\left(\frac{-(\Delta H_i - T\Delta S_i)}{RT}\right), \quad (12)$$

где ΔH_i – энтальпия i -й реакции, Дж/моль;

ΔS_i – энтропия i -й реакции, Дж/(мольК);

T – температура, К.

R – универсальная газовая постоянная.

Для упрощения методики расчета величины мольных долей веществ представлены как функции степеней полноты, X [3] г линейно-независимых реакций.

$$x_j = \frac{N_j^0 + \sum_{i=1}^r \alpha_{ij} X_i}{\sum_{j=1}^m \left(N_j^0 + \sum_{i=1}^r \alpha_{ij} X_i \right)}, \quad (13)$$

где N_j^0 – начальное количество j -го вещества, моль;

X_i – степень полноты i -й реакции.

Таким образом, получаем систему r уравнений с r неизвестными X_i для расчета равновесного состава исследуемой химической системы. При этом температура и давление считаются заданными.

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{N_j^0 + \sum_{i=1}^r \alpha_{ij} X_i}{\sum_{j=1}^m \left(N_j^0 + \sum_{i=1}^r \alpha_{ij} X_i \right)} \right)^{\alpha_{ij}} = K_i, \quad i = 1, \dots, r. \quad (14)$$

Рассмотрим систему, в которой могут быть следующие вещества: $MgCO_3$; MgO ; $MgSO_3$; $MgSO_4$; CO_2 ; SO_2 ; SO_3 ; O_2 .

Система имеет 8 веществ ($m=8$) и 4 компонента ($n=4$). Соответственно в ней может протекать 4 линейно-независимые реакции.

- 1) $MgCO_3 = MgO + CO_2$
- 2) $MgSO_3 = MgO + SO_2$
- 3) $MgSO_4 = MgO + SO_3$
- 4) $SO_2 + 0.5O_2 = SO_3$

Стехиометрическая матрица системы имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} MgCO_3 & MgO & MgSO_3 & MgSO_4 & CO_2 & SO_2 & SO_3 & O_2 & \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (1) \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & (2) \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & (3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -0,5 & (4) \end{pmatrix}$$

Элементами данной матрицы являются стехиометрические коэффициенты протекающих реакций. Каждая строка матрицы соответствует реакции, а столбец матрицы – определенному веществу. Расчет равновесных значений молярного состава системы от температуры выполняли при заданном начальном составе, соответствующем мольному отношению $MgCO_3 (MgO) : SO_2 = 1$ или 2 составу очищаемых топочных газов (1-я и 2-я строки таблицы).

Если в системе отсутствуют $MgCO_3$ и CO_2 , то в ней могут протекать уже 3 линейно-независимые реакции:

- 1) $MgSO_3 = MgO + SO_2$
- 2) $MgSO_4 = MgO + SO_3$
- 3) $SO_2 + 0.5O_2 = SO_3$

Стехиометрическая матрица системы будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} MgO & MgSO_3 & MgSO_4 & SO_2 & SO_3 & O_2 & \\ \hline 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & (2) \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & (3) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -0,5 & (4) \end{pmatrix}$$

Расчет равновесных значений молярного состава системы от температуры выполняли при заданном начальном составе, соответствующем мольному отношению $MgCO_3 (MgO) : SO_2 = 1$ или 2 составу очищаемых топочных газов (3-я и 4-я строки таблицы).

Таблица – Исходный состав системы, моль

j	1	2	3	4	5	6	7	8
Вещество	$MgCO_3$	MgO	$MgSO_3$	$MgSO_4$	CO_2	SO_2	SO_3	O_2
N_j^0 , моль	1	0	0	0	0	1	0	0,5
	2	0	0	0	0	1	0	0,5
	0	1	0	0	0	1	0	0,5
	0	2	0	0	0	1	0	0,5

Результаты расчетов представлены на рисунке 3 для исходных мольных соотношений $MgCO_3:SO_2$ равных 1 (рисунок 2а) и 2 (рисунок 2б)

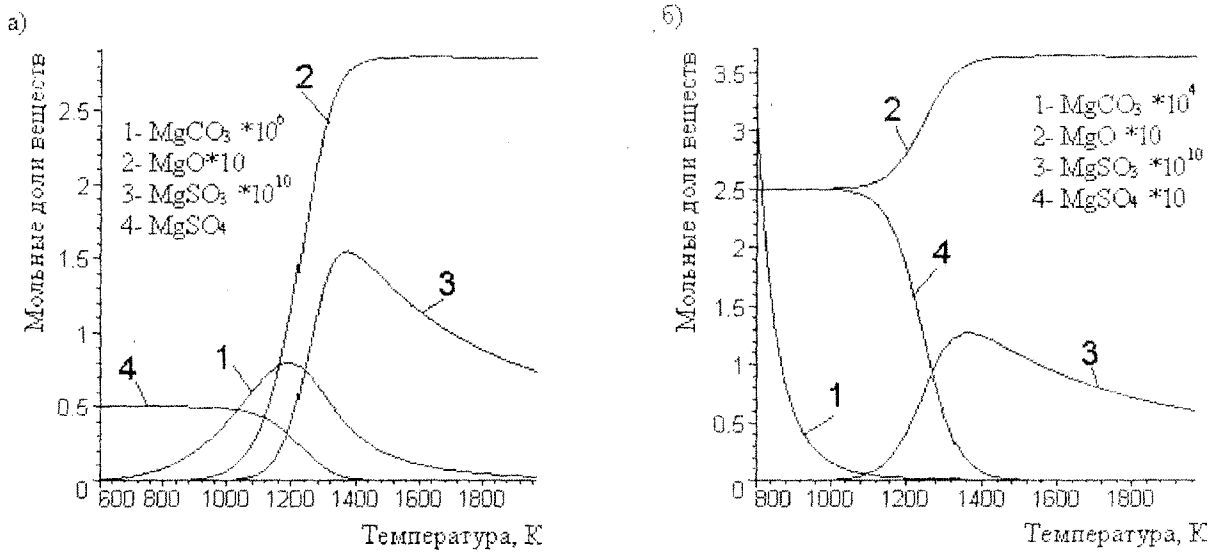


Рис. 2. Зависимость равновесных концентраций x_j в системе $MgCO_3 - SO_2 - O_2$ при мольном отношении:

а) $MgCO_3/SO_2 = 1$; б) $MgCO_3/SO_2 = 2$

Расчеты выполняли в программе Maple 9.5 путем численного решения соответствующих систем уравнений при заданных начальном составе системы, термодинамических характеристиках всех веществ участников реакции и макропараметрах температуре и давлении. Давление принимали равным атмосферному для всех расчетов, а температуру варьировали от 800 К до 2000 К с шагом 25 К. Для каждой из систем выполняли серию расчетов при указанных температурах. Затем по найденным значениям равновесных степеней полноты реакций рассчитывали равновесные концентрации веществ, входящих в систему. Однако, сравнивая графические зависимости рисунков 2а и 2б, видно, что равновесные концентрации x_j существенно меняются от общего количества молей веществ в системе, что затрудняет анализ поведения отдельных веществ в системе. Поэтому, нами дополнительно выполнены расчеты равновесных чисел молей N_j и представлены в виде графиков (рисунок 3).

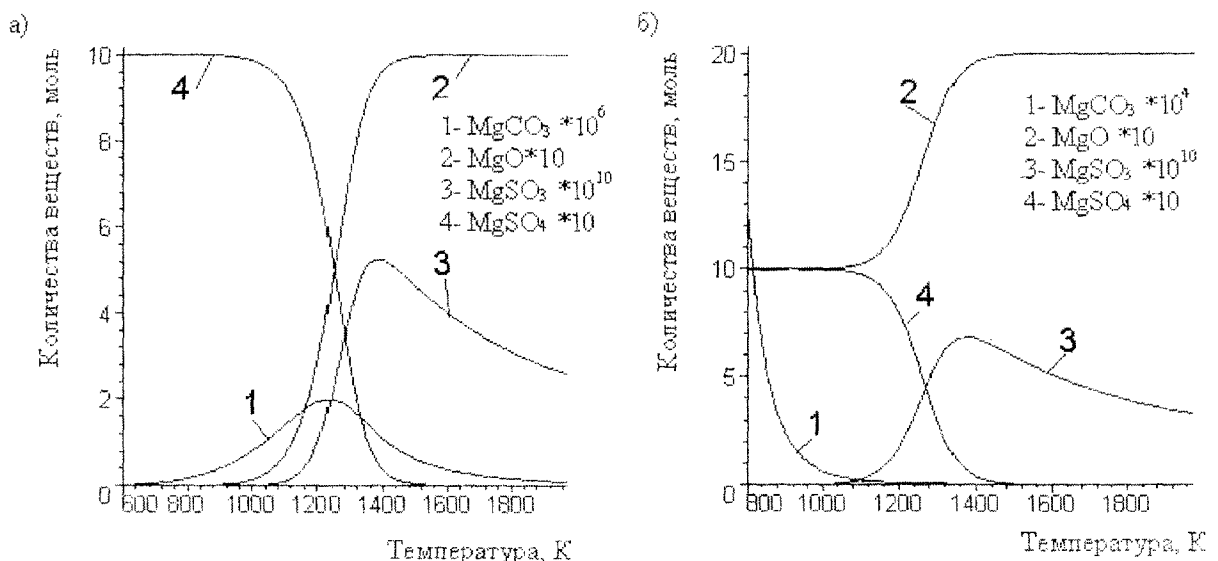


Рис. 3. Зависимость равновесного числа молей N_j в системе $MgCO_3 - SO_2 - O_2$ при мольном отношении:

а) $MgCO_3/SO_2 = 1$; б) $MgCO_3/SO_2 = 2$

С точки зрения практического использования $MgCO_3$ для очистки от SO_2 наибольший интерес представляет зависимость равновесной мольной доли CO_2 , SO_2 , SO_3 и O_2 от температуры для анализируемых систем показанная на рисунке 4.

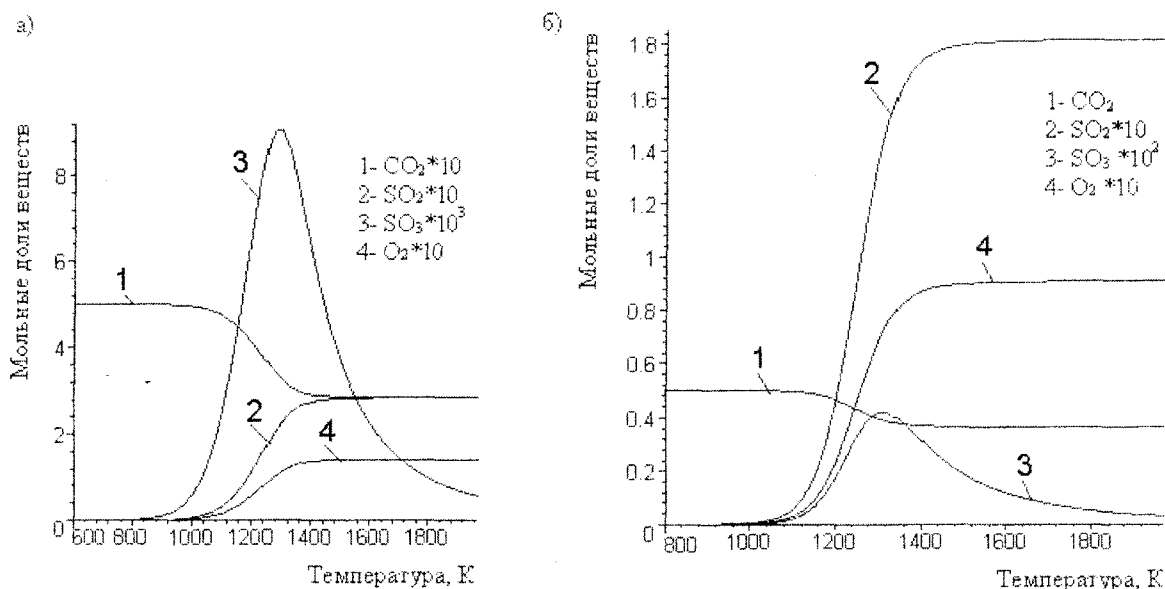


Рис. 4. Зависимость равновесной мольной доли SO_2 от температуры для системы:

а – $MgCO_3 : SO_2 = 1$; б – $MgCO_3 : SO_2 = 2$

Поскольку нами была поставлена задача сравнить равновесные степени поглощения оксида серы как известняком, так и оксидом кальция, по предложенной методике были получены данные для системы $MgO - SO_2 - O_2$, представленные на рисунке 5.

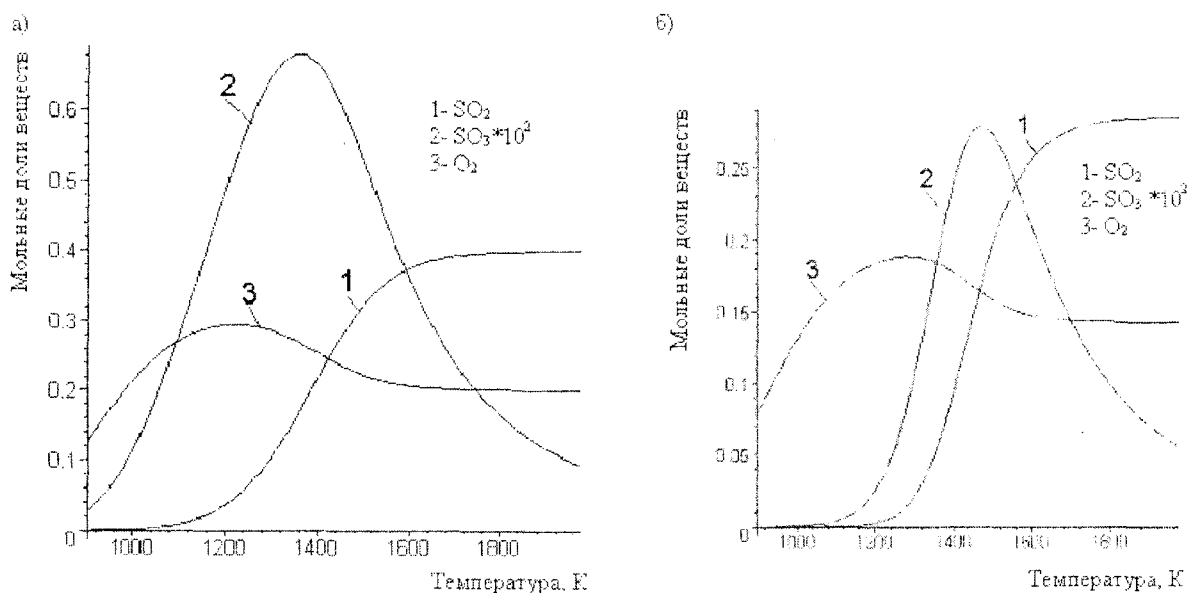


Рис. 5. Зависимость равновесной мольной доли SO_2 от температуры для системы:

а – $MgO : SO_2 = 1$; б – $MgO : SO_2 = 2$

Сравнивая мольную долю SO_2 в системе $MgCO_3-SO_2-O_2$ (кривые 2 на рисунке 4) и в системе $MgO-SO_2-O$ (кривые 1 на рисунке 5), мы видим, что возможна практически полная очистка топочных газов от серы в интервале температур от 1400 до 2000 К при стопроцентном использовании известняка. Кроме того, во второй системе рабочий интервал температур, при которых возможна полная очистка повышается до 1600 – 2000 °С, в зависимости от начального количества MgO в системе.

Список литературы

1. Захаров Г.В. Установка для десульфурации топочных газов // Патент РФ № 2030206, МПК⁷ C1 6B01D 53/34. – Бюл. № 7 10.03.95.
2. Опыт освоения опытно-промышленной установки очистки дымовых газов от диоксида серы на Дорогобужской ТЭЦ / В.М. Беляйкин, Б.В. Некрасов, И.Н. Шмиголь и др. «Электрические станции». – № 7.– 1996.
3. Куценко С.А., Цымай Д.В. Термодинамические методы моделирования и расчета химических равновесий (статья) // Сборник Известия Орел ГТУ. Серия «Естественные науки». – №1-2. – 2003. – С. 70-75.
4. Цымай Д.В., Куценко С.А. Анализ равновесий в системе $\text{SnO}_2 - \text{SnO} - \text{Sn} - \text{CO} - \text{CO}_2$ // Конденсированные среды и межфазные границы. – Т.5. – №4. – 2003 г. – С. 397-400.

Ответственные за выпуск:
Гордон В.А., Разина Е.В.

Известия ОрелГТУ.
Серия «Естественные науки». – 2005. – № 7-8. – 110 с.

Лицензия № ИД 00670 от 05.01.2000

Подписано в печать

Формат 69х90/8.

Бумага офсетная.

Печать ризография.

Гарнитура «Таймс».

Усл. печ. л. 13,75

Тираж 500 экз.

Заказ № 63/07

Отпечатано с готового оригинал-макета
в ООО «СтройИндустрияИнвест»
302020, г. Орел, Наугорское шоссе, 29.